

ANALISIS DATA GEOSTATISTIKA DENGAN *UNIVERSAL KRIGING*

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Oleh:
Endra Angen Laksana
NIM. 05305141027

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2010**

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul :

ANALISIS DATA GEOSTATISTIKA DENGAN *UNIVERSAL KRIGING*

disusun oleh :

Endra Angen Laksana

NIM. 05305141027

Telah disetujui oleh dosen pembimbing untuk dihadapkan kepada
Dewan Penguji Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Disetujui pada tanggal :

Disetujui oleh :

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Mathilda Susanti, M.Si
NIP. 19640314 198901 2 001

Dr. Heri Retnawati
NIP. 19730103 200003 2 001

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Endra angen Laksana
NIM : 05305141027
Program Studi : Matematika
Fakultas : MIPA
Judul Skripsi : Analisis Data Geostatistika dengan *Universal Kriging*.

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi lain, kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan. Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya

Yogyakarta, Desember 2010

Yang menyatakan,

Endra Angen Laksana
NIM. 05305141027

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “ **Analisis Data Geostatistika dengan *Universal Kriging*** “ yang disusun oleh :

Nama : Endra Angen Laksana

NIM : 05305141027

Prodi : Matematika

telah diujikan di depan Dewan Penguji pada tanggal 27 Oktober 2010 dan dinyatakan lulus.

DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tanda tangan	Tanggal
Mathilda Susanti, M.Si NIP. 19640314 198901 2 001	Ketua Penguji
Dr. Heri Retnawati NIP. 19730103 200003 2 001	Sekretaris Penguji
Dr. DJamillah Bondan Widjajanti NIP. 19610303 198601 2 001	Penguji I
Retno Subekti, M.Sc NIP. 19811116 200501 2 002	Penguji II

Yogyakarta, Desember 2010
Fakultas MIPA UNY
Dekan

Dr. Ariswan
NIP. 19590914 198803 1 003

MOTTO

- ❖ *...Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan... (QS. Al-Mujadalah: 11)*
- ❖ *Barang siapa menuntut ilmu, maka Allah akan memudahkan baginya jalan menuju surga. Dan tidaklah berkumpul suatu kaum disalah satu dari rumah-rumah Allah, mereka membaca kitabullah dan saling mengajarkannya diantara mereka, kecuali akan turun kepada mereka ketenangan, diliputi dengan rahmah, dikelilingi oleh para malaikat, dan Allah akan menyebut-nyebut mereka kepada siapa saja yang ada disisi-Nya. Barang siapa terlambat-lambat dalam amalnya, niscaya tidak akan bisa dipercepat oleh nasabnya. (H.R. Muslim dalam Shahih-nya).*
- ❖ *Dan pengorbanan pada dasarnya bukanlah kerugian, pengorbanan adalah investasi bekal menuju kemuliaan dunia dan akhirat.*

PERSEMBAHAN



Karya kecil ini kupersembahkan untuk:

- *Allah SWT.*
- *Bapak dan ibuku tersayang yang telah memberikan do'a, nasehat, motivasi, dan rasa sayang yang tak terkirakan.*
- *Kakak-kakakku dan adikku yang telah banyak membantuku dalam penyusunan skripsi ini.*
- *Utami wulaningsih yang tak pernah lelah dalam menyemangatiku, menasehatiku, dan memberi banyak inspirasi untukku sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.*
- *Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.*
- *Teman-teman seperjuanganku Matematika'05 terimakasih atas dukungan kalian semua dan kebersamaan kalian selama ini.*

ANALISIS DATA GEOSTATISTIKA DENGAN *UNIVERSAL KRIGING*

Oleh :

Endra Angen Laksana
NIM. 05305141027

ABSTRAK

Geostatistika awalnya dikembangkan dalam industri pertambangan untuk menaksir cadangan-cadangan mineral yang ada di bumi. Proses prediksi ini dikenal dengan istilah *kriging*. *Kriging* merupakan teknik untuk mengestimasi kandungan mineral berdasarkan data yang telah diketahui. *Universal kriging* adalah metode *kriging* yang mempunyai kecenderungan *trend* tertentu dan merupakan bentuk umum dari *simple kriging* sebagai salah satu cara perluasan dari metode *Ordinary kriging*. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai *Universal kriging*, sifat estimator, proses estimasi, dan penerapannya pada data air tanah.

Universal kriging adalah metode penaksiran yang digunakan untuk menangani masalah *kenonstasioneran* dari data sampel. Seperti halnya dengan *Ordinary kriging*, *Universal kriging* juga menghasilkan BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*). Sifat BLUE membuktikan bahwa estimator *Universal kriging* adalah estimator tak bias, linier dan punya nilai variansi minimum. Dengan BLUE ini maka akan dihasilkan MSE minimum (*Mean Square Error* minimum) yang digunakan untuk mengukur efisiensi dari estimator. MSE minimum diperlukan pada analisis struktural, yaitu untuk mencocokkan nilai *semivariogram eksperimental* dengan *semivariogram Universal kriging*. Dengan MSE minimum didapatkan perhitungan dan juga *variansi error* dari masing-masing data sampel yang akan di estimasi.

Dalam kasus ini, *Universal kriging* diaplikasikan pada data kandungan air tanah sebanyak 94 data, lengkap dengan titik-titik koordinatnya yaitu (x,y,z) dan juga *p*. Koordinat *x* menyatakan absis, koordinat *y* menyatakan ordinat, dalam hal ini koordinat *z* menyatakan kedalaman dan *p* menyatakan porositas atau kandungan air tanah. Dengan bantuan Matlab R2008a dan juga Minitab15 diperoleh plot yang menunjukkan bahwa data yang diperoleh bersifat *non-stasioner*. Dari tabel MSE minimum (*Mean Square Error* minimum) maka diperoleh model *eksponensial* yaitu sebagai *semivariogram teoritis* terkecil yang dianggap cocok dengan *semivariogram Universal kriging*. Dari hasil estimasi kandungan air tanah sebanyak 17307 lokasi, diperoleh estimasi kandungan air tanah minimum sebesar 9.743425 % pada koordinat (0.614,0.142,19) dengan *variansi error* sebesar 1.2032869 dan estimasi kandungan maksimum sebesar 16.47294 % pada koordinat (2.528 ,4.811,47.8) dengan *variansi error* sebesar 1.2415946.

KATA PENGANTAR



Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi dengan judul “Analisis Data Geostatistika Dengan *Universal Kriging*” skripsi ini disusun dalam rangka menyelesaikan studi Strata satu untuk memperoleh gelar Sarjana Sains. Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, bimbingan, dan arahan dari berbagai pihak. Seiring dengan selesainya skripsi ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Ariswan, Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, yang telah memberi izin dan kesempatan kepada penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Hartono, Ketua Jurusan Pendidikan Matematika.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.Si, Ketua Program Studi Matematika.
4. Ibu Mathilda Susanti, M.Si, sebagai Dosen Pembimbing I yang telah memberikan, nasehat, arahan, dan masukan yang sangat membangun.
5. Ibu Dr. Heri Retnawati, sebagai Dosen Pembimbing II yang telah memberikan nasehat, arahan serta masukan-masukan yang sangat membangun dalam penyusunan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kepada penulis.
7. Teman-teman seperjuangan Matematika Reguler 2005 yang terus memberikan motivasi dan bantuannya dalam penyusunan skripsi.
8. Semua pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini banyak kekurangan. Namun demikian, penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.

Yogyakarta, Desember 2010

Penulis

Endra Angen Laksana
NIM. 05305141027

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
HALAMAN MOTTO.....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	vi
ABSTRAK.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang.....	1
B. Batasan Masalah.....	3
C. Rumusan Masalah.....	3
D. Tujuan Penulisan.....	4
E. Manfaat penulisan.....	4

BAB II LANDASAN TEORI

2.1. Matriks dan Operasi Matriks.....	5
2.1.1. Matriks	5
2.1.2. Matriks Bujur Sangkar	6
2.1.3. Matriks Satuan.....	6
2.1.4. Transpose Matriks.....	7
2.1.5. Invers Matriks	7
2.1.6. Sifat – sifat Matriks.....	9
2.2. Variable Random.....	10
2.2.1. Variable Random Kontinu.....	11
2.2.2. Ekspektasi	11
2.2.3. Variansi.....	12
2.2.4. Kovariansi.....	14
2.3. Pengali <i>Lagrange</i>	15
2.4. BLUE (<i>Best Linier Unbiased Estimr</i>).....	16
1. <i>Linear</i>	18
2. <i>Unbiased</i>	19
3. <i>Best</i>	19
2.5. Stasioneritas.....	21
2.5.1. <i>Stricly Stationarity</i>	21
2.5.2. <i>Second-Order Stationarity</i>	21
2.5.3. <i>Intrinsic Stationarity</i>	22
2.6. Korelasi spasial.....	24

2.6.1. Variogram dan Semivariogram Eksperimental.....	24
2.7. Semivariogram Teoritis.....	26
2.7.1. Spherical Model.....	27
2.7.2. Model eksponensial (<i>Exponential Model</i>).....	27
2.7.3. Model Gauss (<i>Gaussian Model</i>).....	27
2.8. Data Spasial.....	28
2.8.1. Model Umum Data Spasial.....	28
2.8.2. Lag Spasial.....	29
2.8.3. Tipe-tipe Data Spasial.....	31
2.8.3.1. Data Geostatistik.....	31
2.8.3.2. Data Lattice.....	32
2.8.3.3. Pola titik.....	32

BAB III PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

3.1. Kriging.....	34
3.2. Universal Kriging.....	37
3.2.1. Analisis Trend	39
3.2.2. BLUE (<i>Best Linier Unbiased Estimator</i>)	
<i>Universal Kriging</i>	40
3.2.2.1. <i>Unbiased</i>	40
3.2.2.2. <i>Linier</i>	41

3.2.2.3. <i>Best</i>	42
3.2.3. <i>Second Order Stationary</i> dari <i>Universal kriging</i>	49
3.2.4. <i>Semivariogram Universal Kriging</i>	49
3.3. Algoritma pengestimasian.....	50
3.4. Diagram pengestimasian kandungan air tanah menggunakan metode <i>Universal kriging</i>	51
3.5. Aplikasi.....	52
3.5.1. Definisi air tanah.....	52
3.5.2. Pendeskripsian Data.....	53
3.5.3. Sistem Pemrograman.....	58
3.5.4. Asumsi Non-Stasioneritas Data.....	59
3.5.5. Analisis Data.....	59
3.5.6. <i>Semivariogram Universal Kriging</i> dan Analisis Struktural.....	63
3.5.6.1. <i>Semivariogram</i> air tanah.....	63
3.5.7. Estimasi kandungan air tanah.....	64
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	
A. Kesimpulan.....	68
B. Saran.....	70
DAFTAR PUSTAKA.....	71
LAMPIRAN.....	73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Plot fungsi kovariansi dengan <i>semivariogram</i>	24
Gambar 2.2 <i>Semivariogram</i>	26
Gambar 2.3 Model <i>Semivariogram Teoritis</i>	28
Gambar 2.4 Data Spasial.....	29
Gambar 3.1 Diagram estimasi kandungan air tanah menggunakan metode <i>Universal kriging</i>	51
Gambar 3.2 Plot sebaran data dengan Minitab 15.....	55
Gambar 3.3 Stasionary variable dan Non-stasionary variable	56
Gambar 3.4 Plot 3D ke dalam Matlab.....	57
Gambar 3.5 Plot <i>porositas</i> dengan kedalaman (z).....	61
Gambar 3.6 Plot <i>semivariogram</i> eksperimental air tanah	64
Gambar 3.7 Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat x,y,dan z.....	66
Gambar 3.8 Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat x dan z.....	66
Gambar 3.9 Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat y dan z.....	67
Gambar 3.10 Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat x dan y.....	67

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Tabel data <i>porositas</i> dengan koordinat lokasinya	54
Tabel 3.2. Ringkasan data.....	58
Tabel 3.3. Tabel Anova.....	60
Tabel 3.4. Tabel <i>Coefficients</i>	60
Tabel 3.5. Tabel <i>semivariogram</i> beserta pasangan data dan jaraknya.....	63
Tabel 3.6. Tabel hasil estimasi kandungan air tanah beserta variansi <i>error</i>	65

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data titik koordinat (meter) dan <i>porositas</i> air tanah (persen).....	73
Lampiran 2. Perhitungan <i>Semivariogram</i> Eksperimental.....	76
Lampiran 3. Output <i>Semivariogram</i> Eksperimental.....	78
Lampiran 4. Perbandingan <i>semivariogram eksperimental porositas</i> air tanah dengan <i>semivariogram teoritis</i> menggunakan model <i>spherical, eksponensial</i> dan <i>Gaussian</i>	79
Lampiran 5. Plot keempat model <i>semivariogram</i>	80
Lampiran 6. Syntax program R beserta hasil estimasi <i>porositas</i> (kandungan) air tanah menggunakan metode <i>Universal kriging</i>	81
Lampiran 7. Syntax plot hasil estimasi <i>porositas</i> (kandungan) air tanah dengan Matlab	82
Lampiran 8. Data hasil estimasi kandungan air tanah (<i>porositas</i>) menggunakan metode <i>universal kriging</i>	83

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Geostatistika merupakan salah satu ilmu yang menggunakan analisis *spasial*. Analisis *spasial* merupakan analisis yang memiliki atribut lokasi, seperti halnya lokasi absolut (koordinat). Geostatistika muncul pada awal 1980-an sebagai perpaduan ilmu pertambangan, geologi, matematika, dan statistika. Geostatistika awalnya dikembangkan dalam industri mineral untuk menaksir cadangan-cadangan mineral yang ada di bumi. Geostatistika mengenal variasi *spasial* pada skala besar maupun skala kecil, atau jika dalam bahasa statistiknya mampu memodelkan baik kecenderungan *spasial* (*spatial trends*) maupun korelasi *spasial* (*spatial correlation*).

G. Matheron menamakan proses prediksi ini sebagai *kriging* (Ricardo A. Olea, 1999: 91). *Kriging* juga dapat diartikan sebagai metode untuk menangani variabel terregionalisasi (*regionalized variable*). Variabel terregionalisasi adalah variabel yang dapat mempunyai nilai yang berbeda (bervariasi / berfluktuasi) dengan berubahnya lokasi / tempat. Variabel terregionalisasi berbeda dengan variabel random, karena mempunyai karakter deterministik pada kontinuitas *spasial*nya. Sebagai contoh: topografi permukaan tanah, *porositas*, *permeabilitas*. *Porositas* adalah jumlah atau persentase pori atau rongga dalam total volume batuan, sedangkan *permeabilitas* merupakan kemampuan batuan atau tanah untuk melewati atau meloloskan kandungan mineral.

Bila ditinjau dari cara estimasi dan proses perhitungannya, *kriging* dapat dibedakan atas beberapa macam, yakni : *Point kriging*, *Block kriging*, *Co-kriging*, *Universal kriging*. *Point kriging* atau *simple kriging* atau sering disebut juga dengan *Ordinary kriging* yaitu metode perhitungan nilai harapan (estimasi) suatu titik sampel. *Block kriging* merupakan teknik yang memperkirakan sifat-sifat statis dari suatu *block*. *Co-kriging* adalah suatu teknik khusus dalam interpolasi dengan memakai dua variabel yang berbeda akan tetapi secara *spasial* saling berhubungan. Sedangkan *Universal Kriging* adalah *kriging* dari data yang mempunyai kecenderungan trend tertentu.

Universal kriging tepat jika diaplikasikan untuk menganalisis data yang mempunyai kecenderungan tertentu, misalnya tebal lapisan bertambah dengan berubah-ubahnya arah atau nilai permeabilitas yang berkurang dengan menjauhnya lokasi dari *channel sand*. *Channel sand* merupakan lokasi yang telah ditandai atau dijadikan target penambangan. *Universal kriging* sering disebut juga dengan ‘ *kriging with a trend* ‘. *Universal kriging* sebenarnya hampir mirip dengan *Ordinary kriging*. Perbedaan dari keduanya hanyalah pada jenis data yang diteliti.

Ada banyak hal dalam pengestimasian suatu kadar atau kandungan mineral yang ada di bumi ini. Salah satunya adalah pengestimasian kandungan air tanah. Air tanah adalah air yang mengisi celah-celah atau ruang pori-pori tanah dan batuan yang berada di bawah tanah yang juga memiliki kecenderungan trend tersendiri. *Porositas* dan *permeabilitas* dari air tanah akan berbeda seiring dengan bertambahnya letak kedalaman air tanah tersebut. Untuk mengetahui kandungan air tanah diperlukan

estimasi (taksiran kandungan air tanah). Berdasarkan ciri khas yang dimiliki oleh air tanah tersebut, maka pengestimasian kandungan air tanah ini tepat bila menggunakan metode *Universal Kriging* yang mengutamakan data dengan kecenderungan trend tertentu.

B. Batasan Masalah

Dalam geostatistika khususnya dalam bidang pertambangan, metode yang tepat untuk mengestimasi kandungan mineral disebut dengan *kriging*. Ada beberapa metode estimasi dalam *kriging*. Untuk menghindari masalah yang makin meluas maka pada tulisan ini hanya akan dibahas metode *Universal kriging* dan jenis data yang akan diestimasi dengan *Universal kriging*.

C. Rumusan Masalah

1. Apakah yang dimaksud dengan *Universal kriging*?
2. Bagaimana sifat estimator dari *Universal kriging*?
3. Bagaimana proses estimasi kandungan mineral dengan metode *Universal kriging*?
4. Bagaimanakah aplikasi *Universal kriging* dalam menentukan kandungan air tanah?

D. Tujuan Penulisan

1. Menjelaskan tentang apa yang dimaksud dengan Universal kriging.
2. Mengetahui sifat-sifat yang ada pada *Universal kriging*.
3. Menjelaskan tentang proses estimasi kandungan mineral dengan metode *Universal kriging*.
4. Menjelaskan aplikasi *Universal kriging* dalam menentukan estimasi kandungan air tanah.

E. Manfaat Penulisan

1. Penulis dapat mempelajari lebih dalam tentang metode *Universal kriging* pada geostatistika.
2. Penulis dapat mempelajari lebih dalam tentang sifat-sifat yang terdapat pada metode *Universal kriging*.
3. Penulis dapat mengetahui proses estimasi kandungan mineral dengan metode *Universal kriging*.
4. Penulis dapat mengetahui aplikasi metode *Universal kriging* dalam menentukan estimasi kandungan air tanah.

BAB II

DASAR TEORI

2.1. Matriks dan Operasi Matriks

2.1.1. Matriks (Howard Anton tahun 2000 : 22)

Definisi 2.1.1.1. *Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dari susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.*

Jika A adalah sebuah matriks, maka a_{ij} menyatakan entri yang terdapat dalam baris i dan kolom j dari A . Jadi sebuah matriks 3×4 yang umum dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Jika B menyatakan matriks, maka b_{ij} menyatakan entri dalam baris i dan kolom j . Jadi, matriks $m \times n$ yang umum dapat dituliskan sebagai

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [b_{ij}]_{m \times n}$$

Sebuah matriks dengan m baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berordo n , dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ dikatakan berada pada diagonal utama dari suatu matriks A . Maka matriks A dinyatakan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut juga sama.

2.1.2. Matriks Bujur Sangkar (*Square Matrix*)

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dimana banyaknya entri baris (m) sama dengan banyaknya jumlah entri kolom (n). Matriks A disebut matriks bujur sangkar orde n bila banyaknya baris dan kolom adalah n .

2.1.3. Matriks Satuan (*Identity Matrix*)

Matriks identitas merupakan matriks bujur sangkar dimana semua elemen pada diagonal utama mempunyai nilai satu (1). Matriks identitas dinyatakan dengan I .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

2.1.4. Transpose Matriks

Definisi 2.1.4.1. *Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose matriks A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A , kolom keduanya adalah baris kedua dari A , demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A , dan seterusnya.*

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad A^t_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

2.1.5. Invers Matriks

Definisi 2.1.5.1. *Jika A adalah matriks kuadrat, dan jika dapat dicari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan B dinamakan inverse dari A .*

Misal A adalah matriks yang dapat dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan symbol A^{-1} . Jadi

$$AA^{-1} = I \quad \text{dan} \quad A^{-1}A = I$$

Invers A memainkan peranan penting dalam ilmu hitung matriks yang sangat menyerupai peranan yang dimainkan oleh kebalikan a^{-1} dalam hubungan numerik $aa^{-1} = 1$ dan $a^{-1}a = 1$.

misal :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

jika $ad-bc \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1.5.1. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan ukuranya sama, maka

(a) AB dapat dibalik

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti :

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, maka telah dibuktikan bahwa AB dapat dibalik dan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Tetapi $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Demikian juga $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

Definisi 2.1.5.2. Sebuah matriks $n \times n$ dinamakan matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) $n \times n$ dengan melakukan sebuah operasi baris elementer.

Untuk mencari invers suatu matriks A yang dapat dibalik adalah dengan mencari urutan operasi baris elementer tereduksi A pada matriks satuan dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama ini pada I_n untuk mendapatkan A^{-1} .

$$[A | I] \xrightarrow{\text{operasi baris elementer}} [I | A^{-1}]$$

contoh :

akan dicari invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - B_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 + 2B_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} (-1)B_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_2 + 3B_3 \\ B_1 - 3B_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - 2B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Teorema 2.1.5.2. Sebuah matriks kuadrat A dapat dibalik (*invertible*) jika dan hanya jika $\det(A)^{-1} \neq 0$.

2.1.6. Sifat-sifat Matriks

Teorema 2.1.6.1. Jika A adalah matriks kuadrat dan r serta s adalah bilangan bulat, maka $A^r A^s = A^{r+s}$ dan $(A^r)^s = A^{rs}$

Teorema 2.1.6.2. Jika A adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka

- (a) A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
- (b) A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, untuk $n = 0, 1, 2, \dots$
- (c) Untuk setiap skalar k yang tak sama dengan nol, maka kA dapat dibalik dan

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Bukti :

Jika k adalah sebarang skalar yang tidak nol (0), maka

$$(kA) \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) = \frac{1}{k} (kA) A^{-1} = \left(\frac{1}{k} k\right) AA^{-1} = 1I = I$$

karena $\left(\frac{1}{k} A^{-1}\right)(kA) = I$ sehingga (kA) dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Teorema 2.1.6.3. Jika ukuran matriks seperti operasi yang diberikan dapat dilakukan, maka

- (a) $(A^t)^t = A$
- (b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- (c) $(kA)^t = kA^t$, dimana k adalah sebarang skalar
- (d) $(AB)^t = B^t A^t$

2.2. Variabel Random

Definisi 2.2.1. Variabel random Z pada ruang sample S adalah fungsi $Z : S \rightarrow \mathbb{R}$ yang menyatakan sebuah bilangan real $Z(s)$ dengan setiap titik sample $s \in S$. Variabel random dinotasikan dengan huruf besar Z dan huruf kecil z yang menyatakan nilai dari variabel random tersebut.

Pada suatu unit percobaan hanya menghasilkan satu variabel terukur yang dinamakan variabel random. Tetapi jika menghasilkan beberapa variabel terukur, misal : m variabel, maka hasil pengukuran tersebut dinamakan vektor random. Dengan kata lain, komponen atau elemen dari vektor random adalah variabel random.

2.2.1. Variabel Random Kontinu (Bain dan Engelhardt 1992, hal : 64)

Definisi 2.2.1.1. Suatu variabel random Z dikatakan variabel random kontinu jika terdapat fungsi $f(z)$ sebagai fungsi densitas peluang (probability density function) atau sering disingkat (pdf) dari Z , dengan CDF sebagai berikut:

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(t)dt$$

2.2.2. Ekspektasi (Bain dan Engelhardt tahun 1992, hal: 67)

Definisi 2.2.2.1. Jika Z adalah sebuah variabel random kontinu dengan fungsi densitas peluang (pdf) $f(z)$, maka nilai ekspektasi dari Z adalah :

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz$$

Teorema 2.2.2.1. jika a dan b merupakan suatu konstanta, maka :

$$E(aZ + b) = aE(Z) + b \quad (2.1)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} E(aZ + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (az + b)f(z)dz \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} zf(z) dz + b \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \\ &= aE(Z) + b \end{aligned}$$

1. Jika diambil $a = 0$, maka $E(b) = b$
2. Jika diambil $b = 0$, maka $E(aZ) = aE(Z)$

2.2.3. Variansi (Bain dan Engelhardt 1992, hal: 73)

Definisi 2.2.3.1. Variansi dari variabel random Z didefinisikan sebagai

$$var(Z) = E[Z - E(Z)]^2 \quad (2.2)$$

Teorema 2.2.3.1. Jika Z adalah suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f(z)$ maka:

$$var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

Bukti :

$$var(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} [Z - E(Z)]^2 f(z)dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} [z^2 - 2zE(Z) + [E(Z)]^2] f(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z) dz - 2E(Z) \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz + [E(Z)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \\
&= E(Z^2) - 2E(Z)E(Z) + [E(Z)]^2 \\
&= E(Z^2) - [E(Z)]^2
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.3.2. Jika Z variabel random, a dan b konstanta maka:

$$\text{Var}(aZ + b) = a^2 \text{var}(Z) \quad (2.3)$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(aZ + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} [az - aE(Z)]^2 f(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [a^2 z^2 - 2a^2 zE(Z) + a^2 [E(Z)]^2] f(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 [z^2 - 2zE(Z) + [E(Z)]^2] f(z) dz \\
&= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} [z - E(Z)]^2 f(z) dz \\
&= a^2 \text{var}(Z)
\end{aligned}$$

2.2.4. Kovariansi (Bain dan Engelhardt 1992, hal : 174)

Definisi 2.2.4.1. *Kovariansi antara variabel random Z dan Y dinotasikan dengan σ_{ZY} . Nilai kovariansi antara variabel Z dan Y didefinisikan sebagai:*

$$Cov(Z, Y) = E[(Z - E(Z))(Y - E(Y))] \quad (2.4)$$

Teorema 2.2.4.1. *Jika Z dan Y variabel random, a dan b suatu konstanta, maka :*

$$Cov(Z + a, Y + b) = Cov(Z, Y) \quad (2.5)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Cov(Z + a, Y + b) &= E[(Z + a - a - E(Z))][(Y + b - b - E(Y))] \\ &= E[(Z - E(Z))(Y - E(Y))] \\ &= Cov(Z, Y) \end{aligned}$$

Teorema 2.2.4.2. *Jika Z dan Y variabel random, a dan b konstanta maka :*

$$Cov(aZ, bY) = ab Cov(Z, Y) \quad (2.6)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Cov(aZ, bY) &= E[(aZ - aE(Z))(bY - bE(Y))] \\ &= E[a[(Z - E(Z))]b[(Y - E(Y))]] \\ &= ab E[(Z - E(Z))(Y - E(Y))] \\ &= ab Cov(Z, Y) \end{aligned}$$

Teorema 2.2.4.3. *Jika Z variabel random, a dan b suatu konstanta, maka*

$$\text{Cov}(Z, aZ + b) = a \text{Var}(Z) \quad (2.7)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z, aZ + b) &= E[(Z - E(Z))][(aZ + b) - E(aZ + b)] \\ &= E[(Z - E(Z))(aZ + b - aE(Z) - b)] \\ &= aE[(Z - E(Z))(Z - E(Z))] \\ &= a \text{Var}(Z) \end{aligned}$$

2.3. Pengali *Lagrange*

Fungsi *Lagrange* sering digunakan dalam kasus menyelesaikan masalah optimisasi (penentuan harga ekstrim) dengan batasan-batasan (constrain) tertentu. Prinsip dasar yang digunakan adalah ingin mencari harga ekstrim (optimisasi) fungsi $f(x, y)$ dengan batasan tertentu dan harus memenuhi $g(x, y) = c$. Selanjutnya parameter m adalah variabel baru yang dinamakan pengali *Lagrange*, sehingga dapat membentuk fungsi *Lagrange* sebagai berikut:

$$F(x, y, m) = f(x, y) + m(g(x, y) - c) \quad (2.8)$$

Syarat ekstrim:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial m} = 0$$

Sehingga $g(x, y) = c$.

2.4. BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*)

Suatu data jika memenuhi asumsi regresi maka proses estimasi akan menghasilkan estimator yang bersifat BLUE. Suatu estimator misalkan $\hat{\beta}$ dikatakan memenuhi sifat BLUE jika memenuhi kriteria *best* (terbaik), linier, dan *unbiased* (tak bias).

Jika dari suatu populasi $Y = \beta + e$ dengan $E(e) = 0$ dan $var(e) = \sigma^2$ diambil dari random sampel berukuran T , yaitu Y_1, Y_2, \dots, Y_T maka

$$Y_t = \beta + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

dengan $E(e_t) = 0, E(e_t^2) = \sigma^2$ dan $E(e_t e_s) = 0, t \neq s$. Estimasi dengan metode kuadrat terkecil adalah mencari harga β dengan meminimumkan

$$S = \sum_{t=1}^T e_t^2$$

karena $e_t = Y_t - \beta$ maka

$$S = \sum_{t=1}^T e_t^2 = \sum_{t=1}^T (Y_t - \beta)^2$$

dan estimator $\hat{\beta}$ dirumuskan dalam

$$\hat{\beta} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$$

Dalam notasi matriks dan vektor

$$Y_t = \beta + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

dapat ditulis sebagai

$$\begin{array}{l}
 Y_1 = \beta + e_1 \\
 Y_2 = \beta + e_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 Y_T = \beta + e_t
 \end{array}
 \quad \text{atau} \quad Y = 1\beta + e$$

dengan

$$\begin{array}{l}
 Y' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T) \\
 e' = (e_1, e_2, \dots, e_T) \\
 1' = (1, 1, \dots, 1)
 \end{array}$$

juga

$$\begin{array}{l}
 E(e_1) = 0 \\
 E(e_2) = 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 E(e_t) = 0
 \end{array}
 \quad \text{atau} \quad E(e) = 0$$

$E(e_t^2) = \sigma^2 : E(e_t e_s) = 0, t \neq s, t, s = 1, 2, \dots, T$ dapat ditulis sebagai

$$E \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & \dots & e_1 e_r \\ e_2 e_1 & e_2^2 & \dots & e_2 e_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_T e_1 & e_T e_2 & \dots & e_T^2 \end{bmatrix} = E[e \ e'] = \sigma^2 I$$

dengan I adalah matriks identitas tipe T .

Karena

$$\sum_{t=1}^T e_t^2 = e' e$$

dan

$$\sum_{t=1}^T (Y_t - \beta)^2 = (Y - 1\beta)'(Y - 1\beta)$$

maka

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^T e_t^2 = \sum_{t=1}^T (Y_t - \beta)^2 \\ &= Y'Y - Y'1\beta - \beta'1'Y + \beta'1'1\beta \\ &= Y'Y - 2\beta'1Y + \beta'1'1\beta \end{aligned}$$

dan

$$\hat{\beta} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t = \frac{1}{T} 1'Y \text{ atau } \hat{\beta} = \frac{1}{T} Y'1$$

Dengan memperhatikan nilai $\hat{\beta}$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ merupakan estimator BLUE yaitu

1. *Linear*

Dapat dilihat bahwa $\hat{\beta}$ merupakan fungsi linier dalam Y_1, Y_2, \dots, Y_T atau $\hat{\beta}$ adalah fungsi linier dalam *sampel random*.

2. *Unbiased*

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}] &= E\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t\right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E[Y_t] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \beta = \beta$$

$$E[\hat{\beta}] = \beta$$

Jadi $E[\hat{\beta}] = \beta$, artinya $\hat{\beta}$ merupakan estimator tak bias untuk β .

3. *Best*

Dengan menggunakan perhitungan dalam bentuk matriks dan vektor akan dibuktikan bahwa $\hat{\beta}$ merupakan *best* yang meminimumkan variansi.

$$\hat{\beta} = (1'1)^{-1}1'Y = (1'1)^{-1}1'(1\beta + e)$$

$$= (1'1)^{-1}1'1\beta + (1'1)^{-1}1'e$$

$$= \beta + (1'1)^{-1}1'e$$

$$\hat{\beta} - \beta = (1'1)^{-1}1'e$$

$$var(\hat{\beta}) = E[(1'1)^{-1}1'Y - (1'1)^{-1}1'1\beta] \cdot [(1'1)^{-1}1'Y - (1'1)^{-1}1'1\beta]'$$

$$= E[(1'1)^{-1}1'(Y - 1\beta)] \cdot [(1'1)^{-1}1'(Y - 1\beta)]'$$

$$= E[(1'1)^{-1}1'ee'1(1'1)^{-1}]$$

$$= (1'1)^{-1}1'E(ee')1(1'1)^{-1}$$

$$= \sigma^2(1'1)^{-1} = \frac{\sigma^2}{T}$$

untuk menunjukkan $\hat{\beta}$ adalah BLUE untuk β , maka tinggal menunjukkan bahwa $var(\hat{\beta}) \leq var(\hat{\beta}^*)$ jika $\hat{\beta}^*$ adalah sebarang LUE (*linear unbiased estimator*) untuk β . Caranya adalah dengan memisalkan :

$$\hat{\beta}^* = a'Y = \sum_{t=1}^T a_t Y_t , \quad a' = (a_1, a_2, \dots, a_T)$$

supaya $\hat{\beta}^*$ tak bias untuk β .

Karena $E(\hat{\beta}^*) = a'1\beta$ dan $E(\hat{\beta}^*) = \beta$, haruslah $a'1 = 1$. Jika dipilih $a_t = \frac{1}{T} + c_t$ atau $a' = (1'1)^{-1} + c'$, maka

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}^*) &= \text{var}[a'Y] = a' \text{var}(Y)(a')' = a'[\sigma^2]a \\ &= \sigma^2 a' a = \sigma^2 [(1'1)^{-1}1' + c'] \cdot [1(1'1) + c] \\ &= \sigma^2 (1'1)^{-1} + \sigma^2 (1'1)^{-1}c' + \sigma^2 c'1(1'1)^{-1} + \sigma^2 c'c \\ &= \text{var}(\hat{\beta}) + \sigma^2 c'c \end{aligned}$$

karena $c'c \geq 0$, maka $\text{var}(\hat{\beta}) \leq \text{var}(\hat{\beta}^*)$. Sehingga variansi dari estimator $\hat{\beta}$ adalah minimum.

2.5. Stasioneritas

(Cressie, 1993) Dalam analisis data geostatistika stasioneritas dibagi menjadi tiga yaitu *strictly stationarity*, *second-order stationarity*, dan *intrinsic stationarity*.

2.5.1. Stricly Stationarity

Suatu fungsi random dikatakan *strictly stationarity* jika memiliki fungsi distribusi kumulatif (CDF) didefinisikan

$$F(z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_n)) = F(z(s_{1+h}), z(s_{2+h}), \dots, z(s_{n+h})) \quad (2.9)$$

dimana $z(s_{1+h}), z(s_{2+h}), \dots, z(s_{n+h})$ sama dengan $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_n)$, hanya saja telah dilakukan *translasi* sejauh h . Hal ini berarti kumpulan objek observasi tidak tergantung pada jarak h dan h konstan.

2.5.2. Second-order Stationarity

Second-order stationarity mengasumsikan rata-rata konstan untuk semua lokasi, didefinisikan sebagai berikut

$$E[z(s)] = m \text{ untuk semua } s \in \mathbb{D} \quad (2.10)$$

Hal tersebut berakibat bahwa $E[z(s)] = E[z(s + h)]$, artinya mempunyai nilai rata-rata yang sama untuk semua lokasi s . *Second-order stationarity* mengasumsikan *kovariansi* $C(h)$ antara lokasi s dan $s + h$ ada, dan hanya tergantung pada jarak h yang tidak tergantung pada lokasi, didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} C(h) &= E[\{z(s) - m\}\{z(s + h) - m\}] \text{ untuk semua } h \\ &= E[z(s)z(s + h)] - m^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Untuk $h = 0$ diperoleh $C(0)$ yang sering disebut dengan variansi.

$$\begin{aligned} C(0) &= E[\{z(s) - m\}\{z(s + 0) - m\}] \\ &= E[z(s)z(s + 0)] - m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[(z(s))^2] - E[(z(s))]^2 \\
&= \text{var}[z(s)] \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.5.3. Intrinsic Stationarity

Vektor $z(s)$ dalam lokasi $s \in \mathbb{D}$ dikatakan *intrinsic stationarity* jika memenuhi persamaan :

$$E[z(s+h) - z(s)] = 0 \tag{2.13}$$

$$\text{var}[z(s+h) - z(s)] = 2\gamma(h) \tag{2.14}$$

Persamaan (2.13) menjelaskan bahwa untuk sebarang jarak h mempunyai nilai harapan (ekspektasi) antara lokasi $s+h$ dan s mendekati nol. Dari persamaan (2.14), kuantitas $2\gamma(h)$ merupakan *variogram* yang didefinisikan sebagai variansi beda pengamatan pada lokasi $s+h$ dan s .

Fungsi kovariansi dan *correlogram* ada jika fungsi random adalah *second-order stationarity* dan berdasarkan asumsi pada *intrinsic stationarity* dapat digunakan untuk menurunkan *variogram*. Hubungan antara *semivariogram* dengan fungsi kovariansi dapat dituliskan sebagai berikut

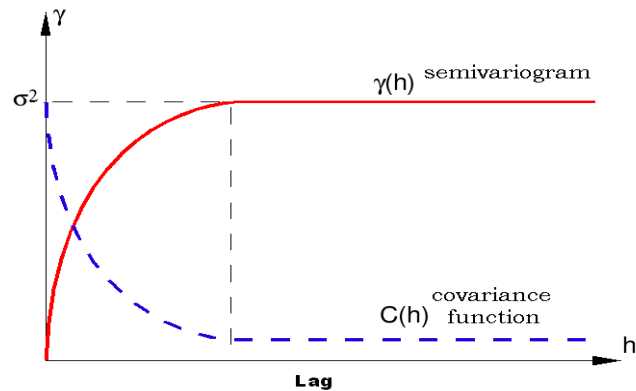
$$\begin{aligned}
2\gamma(h) &= \text{var}[z(s+h) - z(s)] \\
&= E[z(s+h) - z(s)]^2 \\
&= E[\{z(s+h)\}^2 - 2z(s)z(s+h) + \{z(s)\}^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[z(s+h)]^2 - E[z(s)z(s+h)] + E[z(s)]^2 \\
&= \text{var}[z(s+h)] + [E[z(s+h)]]^2 - 2E[z(s)z(s+h)] \\
&\quad + \text{var}[z(s)] + [E[z(s)]]^2 \\
&= 2 \text{var}[z(s)] - 2E[\{z(s) - E[z(s)]\} \{z(s+h) - E[z(s+h)]\}] \\
&= 2\sigma^2 - 2C(h)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (2.15)$$

Berdasarkan persamaan (2.15), *semivariogram* dan fungsi kovariansi mempunyai bentuk yang sama, bedanya hanya saling bertolak belakang. Pada saat *semivariogram* bergerak dari nilai rendah ke nilai tinggi maka fungsi kovariansi bergerak dalam arah sebaliknya yaitu dari nilai tinggi ke nilai rendah, dapat dijelaskan dari gambar berikut :



Gambar 2.1. Plot fungsi kovariansi dengan *semivariogram*

2.6. Korelasi Spasial

Korelasi mencerminkan hubungan antara satu data dengan data lain. Sedangkan *autokorelasi* adalah korelasi diri. Ada 2 macam fungsi autokorelasi yakni *correlogram* dan *semivariogram*. *Correlogram* merupakan korelasi antara dua variabel random yang dipisahkan oleh suatu jarak tertentu. *Semivariogram* adalah perangkat untuk visualisasi, pemodelan dan eksploitasi autokorelasi spasial dari variabel teregionalisasi. *Semivariogram* dipakai untuk menentukan jarak dimana nilai-nilai data pengamatan menjadi saling tidak tergantung atau tidak ada korelasinya.

2.6.1. Variogram dan Semivariogram Eksperimental

Variogram merupakan grafik variansi terhadap jarak (*lag*). Hipotesa yang digunakan untuk menentukan *variogram* berdasarkan pada sifat *intrinsic stationarity* pada persamaan (2.13) dan (2.14), taksiran *variogram eksperimental* adalah pada jarak h adalah :

$$2\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(s_i + h) - z(s_i)]^2$$

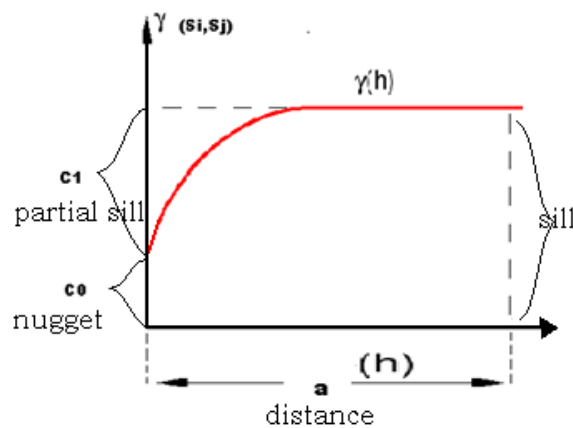
(Cressie, 1993) Sedangkan *semivariogram* adalah setengah dari kuantitas $\gamma(h)$. *Semivariogram* dapat digunakan untuk mengukur korelasi spasial berupa variansi beda pengamatan pada lokasi $s + h$ dan s .

Taksiran *semivariogram eksperimental* pada jarak h , dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(s_i + h) - z(s_i)]^2 \quad (2.16)$$

Dengan $N(h)$ merupakan banyaknya pasangan data untuk jarak h . Tingkah laku *variogram* yang penting diamati adalah sebagai berikut :

1. Nilai *variogram* disekitar titik awal mencerminkan kontinuitas lokal dan *variabilitas* dari data random yang ada. Bila nilai *variogram* pada $h=0$ tidak bernilai 0 maka dapat dikatakan bahwa *variogram* mempunyai efek *nugget*. *Nugget* mencerminkan adanya data skala kecil yang tidak dikorelasikan.
2. *Sill* adalah nilai *semivariogram* pada saat tidak terjadi peningkatan yang signifikan (saat *semivariogram* cenderung mencapai nilai yang stabil). Nilai ini sama dengan nilai variansi dari data tersebut.
3. *Partial sill* adalah nilai selisih antara *sill* dan efek *nugget*.
4. *Range* merupakan jarak (h) dimana nilai mencapai *sill*.



Gambar 2.2. *Semivariogram*

2.7. Semivariogram Teoritis

Untuk analisis lebih lanjut *variogram* atau *semivariogram eksperimental* harus diganti dengan *variogram teoritis* yang mempunyai bentuk kurva paling mendekati dengan *variogram eksperimental*.

Dalam analisis data geostatistika, proses pencocokan antara *variogram eksperimental* dengan *variogram teoritis* ini disebut analisis struktural (*structural analysis*). Selain itu *analisis struktural* juga bisa dilakukan dengan cara perbandingan *mean square error* (MSE) dari masing-masing *variogram teoritis*. Berikut ini adalah beberapa model *semivariogram teoritis* yang diketahui dan biasanya digunakan sebagai pembanding dari *semivariogram eksperimental* yang telah dihitung .

2.7.1. Spherical Model

Bentuk *variogram* ini diumuskan sebagai berikut:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[\left(\frac{3h}{2a} \right) - \left(\frac{h}{2a} \right)^3 \right] & \text{untuk } h \leq a \\ C & \text{untuk } h > a \end{cases} \quad (2.17)$$

Keterangan:

1. h adalah jarak lokasi antar sample
2. C adalah *sill*, yaitu nilai variogram untuk jarak pada saat besarnya konstan (tetap). Nilai ini sama dengan nilai variansi data.
3. a adalah *range*, yaitu jarak pada saat nilai variogram mencapai *sill*.

2.7.2. Model eksponensial (*Exponential Model*)

Pada model *eksponensial* terjadi peningkatan dalam *semivariogram* yang sangat curam dan mencapai nilai *sill* secara *asimtotik*, dirumuskan sebagai berikut:

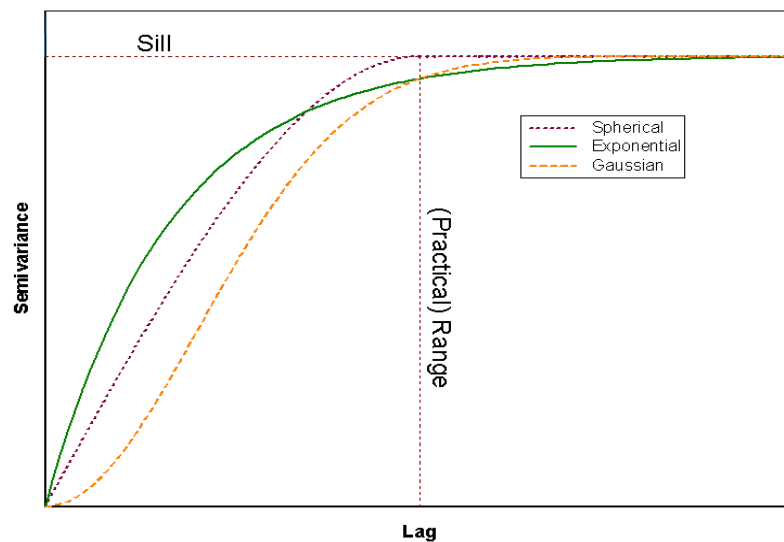
$$\gamma(h) = C \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \right] \quad (2.18)$$

2.7.3. Model Gauss (*Gaussian Model*)

Model Gauss merupakan bentuk kuadrat dari eksponensial sehingga menghasilkan bentuk parabolik pada jarak yang dekat . Model Gauss dirumuskan sebagai berikut :

$$\gamma(h) = C \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right)^2 \right] \quad (2.19)$$

Berikut gambar ketiga model *semivariogram teoritis* :



Gambar 2.3. Model *Semivariogram Teoritis*.

(diambil dari <http://people.ku.edu/~gbohling/cpe940>)

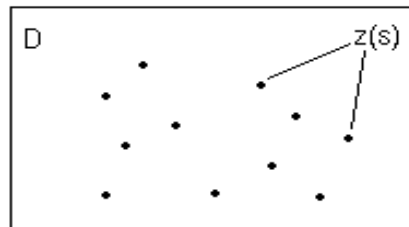
2.8. Data Spasial

Data *spasial* adalah data yang diperoleh dari hasil pengukuran yang memuat informasi mengenai lokasi dan pengukuran. Data spasial disajikan dalam posisi geografis dari objek, lokasi, bentuk dan hubungan dengan objek-objek lainnya. Misalnya penggambaran arah mata angin pada peta tataguna lahan yang berkaitan dengan musim dan sebagainya. Titik, garis, dan luasan digunakan untuk menyajikan data geografik.

2.8.1. Model Umum Data Spasial

Data *spasial* harus dimodelkan dalam bentuk yang sangat sederhana sehingga cukup fleksibel untuk ditangani meskipun ukurannya besar sekali. Data yang dipakai dapat berupa data kontinu maupun data diskrit, juga dapat berupa *agregasi spasial* maupun pengamatan pada titik-titik dalam ruang, lokasi

spasialnya dapat *regular* maupun *irregular*, dan lokasi-lokasinya dapat berupa bidang kontinu secara spasial maupun bidang diskrit. Berikut adalah gambar ilustrasi dari data *spasial* :



Gambar 2.4. Data *spasial*

Ambil $s \in \mathbf{R}^d$ sebagai sebuah lokasi data dalam ruang Euclid d -dimensi dan anggaplah bahwa $\mathbf{Z}(s)$ adalah vektor random dalam lokasi, s adalah nilai acak dan $s \in \mathbf{D}$, dengan \mathbf{D} adalah domain. Selanjutnya akan dibuat agar s bervariasi dalam himpunan indeks $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^d$ sedemikian rupa sehingga menghasilkan medan acak (proses acak) $\mathbf{Z}(s) : s \in \mathbf{D}$; yang disebut sebagai model “*super-populasi*” untuk data spasial.

2.8.2. Lag Spasial

Karakteristik dari data *spasial* adalah adanya ketergantungan linier dalam lokasi. Tingkat perubahan ketergantungan linier dalam lokasi dinamakan *lag spasial*. *Lag spasial* menyatakan urutan berdasarkan jarak antar lokasi, digambarkan sebagai perubahan posisi suatu lokasi tertentu digeser ke lokasi terdekat disekitarnya dengan jarak yang sama. Pada sistem pergeseran lokasi

dapat ke arah kanan atau kiri (timur-barat) dan ke arah atas atau bawah (utara-selatan).

Data *spasial* memiliki struktur lokasi *spasial regular* (beraturan) maupun *irregular* (tak beraturan) dan mungkin berasal dari lokasi *spasial kontinu* maupun *diskrit*. Pada struktur lokasi *spasial regular* (lokasi yang beraturan), *lag spasial* adalah *sistem lattice* berupa *grid* yang biasanya berbentuk bujur sangkar. Suatu kriteria yang biasanya dipakai dalam *sistem grid* adalah pergeseran yang dapat dilakukan hanya satu kali ke lokasi terdekat dengan jarak yang sama untuk setiap *lag spasial*. Selain itu dapat dipilih jarak minimum yang dicapai dari suatu lokasi tertentu ke lokasi terdekat disekitarnya. Ukuran *grid* biasanya ditentukan oleh panjang (m) dan lebar (n).

Pada struktur lokasi *spasial irregular* (tidak beraturan), jarak yang memisahkan pasangan data cenderung akan bervariasi. Hal ini disebabkan karena distribusi lokasi yang tak beraturan. Dalam penentuan *lag spasial* diambil suatu nilai *lag nominal spasial* yang merepresentasikan interval jarak tertentu antara pasangan data. Pada penentuan interval jarak digunakan suatu *lag toleransi* yang bertujuan mendapatkan jumlah pasangan data yang *representatif* untuk analisis lebih lanjut.

2.8.3. Tipe-tipe Data Spasial

2.8.3.1. Data Geostatistik

Data ini mengarah pada sampel yang berupa titik, baik *regular* (beraturan) maupun *irregular* (tidak beraturan) dari suatu distribusi *spasial kontinu*. Data dari setiap sampel titik didefinisikan oleh lokasi dan bobot nilai pengukuran objek yang diamati. Setiap nilai data berhubungan dengan lokasinya. Prinsip dasar geostatistika adalah bahwa area yang sering berdekatan akan cenderung memiliki bobot nilai yang tidak jauh berbeda jika dibandingkan dengan area yang berjauhan.

Geostatistika mengandung pengertian Ilmu statistika yang diterapkan dalam ilmu geologi dan ilmu bumi secara umum. Menurut Cressie (1993), data geostatistika tidak hanya terbatas pada lingkup bumi saja, tetapi mencakup pada wilayah yang lebih *universal* yaitu data-data yang berhubungan dengan teori statistika dan aplikasinya dengan indeks *spasial kontinu* yang membentuk suatu permukaan. Sedangkan Isaacks dan Srivasta (1998) menyatakan bahwa geostatistika menawarkan suatu cara untuk menggambarkan *kontinuitas spasial* dari fenomena alam. Tiga komponen penting dalam geostatistika adalah *correlogram*, fungsi *kovariansi* dan *semivariogram* atau *variogram* yang digunakan untuk mendeskripsikan *korelasi spasial* dari suatu observasi.

2.8.3.2. Data Lattice

Data *lattice* (data area) menggambarkan ide titik-titik yang tersebar merata dalam ruang \mathbb{R}^d . Bentuk dari *lattice* (area) tersebut beraturan (regular) maupun

tidak beraturan (*irregular*) yang didukung informasi lingkungan dan dihubungkan dengan batas-batas tertentu. Secara definisi data area merupakan sebuah konsep dari garis tepi dan *neighbor* (tetangga sebelah). Data untuk tiap area didefinisikan oleh lokasi dan bobot nilai pengukurannya.

Secara umum, data area digunakan pada studi *epidemiologi*, misalnya untuk mengetahui pertumbuhan suatu penyakit, pada suatu wilayah yang terbagi menjadi area-area tertentu. Perlu diingat bahwa variabel respon didefinisikan sebagai himpunan terhitung dari lokasi. Sehingga tidak mungkin dilakukan *interpolasi* karena tidak membentuk suatu permukaan melainkan membentuk sekumpulan titik yang saling berhubungan.

2.8.3.3. Pola titik

Pola titik muncul ketika variabel penting yang akan dianalisis adalah lokasi dari peristiwa pertambangan tersebut. Apakah pola yang diperoleh menggambarkan keteracakan spasial sempurna, *clustering*, atau keteraturan. Contohnya adalah penentuan posisi pohon-pohon dengan ukuran tertentu. Apakah pohon-pohon tertentu membentuk *cluster*, Bagaimana pohon-pohon lain berinteraksi dengan kelompok tersebut, dsb. Variasi ukuran-ukuran disebut sebuah variabel penanda (*mark variable*), dan keseluruhan proses selanjutnya disebut sebagai proses titik *spasial* bertanda (*marked spatial point proses*).

Point patterns adalah data yang diperoleh dari sekumpulan titik-titik pada suatu objek pengamatan yang berdistribusi *spasial diskrit*. Sampel yang digunakan adalah sampel tak beraturan atau sampel yang memiliki jarak yang berbeda. Lokasi pola titik diperoleh berdasarkan pada posisi koordinat (x,y) dari

titik-titik yang diamati sedangkan data pola titik *spasial* didapatkan dari informasi pada objek yang bersesuaian.

Hal terpenting dari analisis pola titik ini adalah untuk mengetahui hubungan ketergantungan antar titik, maksudnya adalah untuk mengetahui apakah lokasi titik-titik yang menjadi objek-objek penelitian membentuk kluster ataukah regular (beraturan) sehingga dapat dilihat apakah terjadi ketergantungan antar titik atau tidak. Metode yang paling sering digunakan untuk analisis pola titik ini adalah dengan *dot map* (peta titik). Pemetaan secara lengkap dari titik-titik yang menjadi objek penelitian sangatlah penting, karena secara umum sulit untuk mengkalkulasikan kecenderungan sebuah pola dari pemeriksaan visual pada peta. Data pola titik *spasial* dapat diobservasikan dalam berbagai fenomena yang terjadi di alam.

BAB III

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

3.1. *Kriging*

Kriging adalah salah satu tehnik atau metode analisis data yang sering digunakan dalam pertambangan. Secara umum, *kriging* merupakan analisis data geostatistika untuk *menginterpolasikan* suatu nilai kandungan mineral berdasarkan nilai-nilai yang diketahui.

Suprajitno (2005) menjelaskan bahwa metode ini merupakan metode khusus dalam *moving average* terbobot (*weighted moving average*) yang meminimalkan variansi dari hasil estimasi. *Kriging* adalah metode estimasi yang memberikan estimator BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*) dari nilai-nilai titik atau rata-rata blok. Metode estimasi ini mempertimbangkan faktor-faktor yang mempengaruhi akurasi estimasi, yaitu: banyaknya sampel, posisi sampel, jarak antar sampel dengan titik yang akan diestimasi, kontinuitas *spasial* dari variabel-variabel yang terlibat dll.

Dengan kata lain metode ini digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai karakteristik dari estimator (\hat{z}) pada titik tidak tersampel berdasarkan informasi dari titik-titik tersampel yang berada disekitarnya.

Menurut Ricardo (1999) estimator *kriging* $\hat{z}(x_0)$ dengan x_0 adalah kombinasi linier dari variabel random dengan x_i , hal tersebut dapat dilihat pada penarikan rumus sebagai berikut:

$$\hat{z}(x_0) - m = \sum_{i=1}^k \lambda_i [z(x_i) - m] \quad (3.1)$$

dimana:

m = nilai mean (konstanta skalar)

λ_i = bobot $z(x_i)$ untuk estimasi lokasi x . Nilai $z(x_i)$ yang sama akan memiliki koefisien bobot yang berbeda untuk estimasi pada lokasi yang berbeda.

x_i = vector lokasi berbeda.

k = banyak data yang tersampel untuk estimasi.

Fungsi random dari persamaan di atas merupakan bentuk dari *second order stationary*, dimana terdapat dua variasi persamaan yang tidak mempengaruhi pada *translasi spasial*. Dua persamaan tersebut adalah:

$$\text{➤ } E[z(x)] = m$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } E[(z(x) - m)(z(x + h) - m)] &= E[z(x)z(x + h) - m^2] \\ &= Cov(x, x + h) = Cov(h) \end{aligned}$$

dimana $E[.]$ sebagai nilai ekspektasi, m adalah konstanta skalar yang juga berarti sebagai *mean*, h adalah vektor jarak, dan $Cov[.]$ adalah nilai kovarian dari fungsi random.

Misalkan $Y(x)$ merupakan hasil perbedaan dari $z(x)$ dengan nilai ekspektasinya:

$$Y(x) = z(x) - E[z(x)] \quad (3.2)$$

dari persamaan di atas, akan dicari nilai ekspektasi dari kedua ruas, yaitu:

$$E[Y(x)] = E[z(x) - E[z(x)]]$$

karena $E[z(x)] = m$ dan m konstan, sehingga $E[z(x)]$ juga bersifat konstan, maka :

$$E[Y(x)] = E[z(x)] - E[z(x)]$$

$$E[Y(x)] = 0$$

kemudian,

$$z(x) - E[z(x)] = 0$$

$$E[z(x)] = z(x) = m$$

sehingga dapat dikatakan bahwa nilai $z(x)$ adalah sama dengan nilai ekspektasinya $E[z(x)]$ dan juga sama dengan nilai m sebagai konstanta skalar, dari pengembangan persamaan (3.2) ini nantinya akan digunakan untuk membuktikan estimator tak bias pada *Universal kriging*.

Tujuan dari *kriging* adalah menentukan nilai koefisien pembobotan λ_i yang meminimalkan estimasi variansi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\sigma^2(x_0) = Var [\hat{z}(x_0) - z(x_0)] \quad (3.3)$$

dengan estimasi pada masing-masing lokasi merupakan perbedaan nilai sebenarnya dari nilai estimator $\hat{z}(x_0)$ dengan nilai $z(x_0)$ yang didefinisikan :

$$\sigma^2(x_0) = Var \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i z(x_i) - z(x_0) \right]$$

3.2. *Universal kriging*

Universal kriging adalah bentuk umum dari *simple kriging* sebagai salah satu cara perluasan dari metode *ordinary kriging*. *Universal kriging* merupakan *kriging* dari data yang mempunyai kecenderungan *trend* tertentu. Metode ini tepat

jika digunakan pada nilai-nilai di titik sampel yang memang mempunyai kecenderungan tertentu. Misalnya tebal lapisan bertambah dengan berubahnya arah atau nilai *permeabilitas* yang berkurang dengan menjauhnya lokasi dari *chanel sand*.

Dengan menganggap bahwa $z(x_i)$ merupakan k bagian variabel random dari ruang lingkup $d \supset D$ sebagai daerah *spasialnya*, estimator *universal kriging* $\hat{z}(x_0)$ untuk fungsi random $z(x_i)$ adalah

$$\hat{z}(x_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i z(x_i)$$

Dengan asumsi bahwa $E[z(x)]$ dan $var[z(x)]$ ada, model $z(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$z(x) = m(x) + \varepsilon(x)$$

$m(x)$ merupakan persamaan dari *trend (drift)*, hasil kombinasi linier dengan koefisien yang tidak nol, dengan

$$E[z(x)] = m(x)$$

$E[z(x)]$ adalah nilai ekspektasi dari $z(x)$.

Untuk *trend (drift)* dari model polinomial $f_1(x)$ disajikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$m(x) = \sum_{l=0}^n \alpha_l f_l(x) \quad (3.4)$$

dimana $f_0(x) = 1$ dan $\varepsilon(x)$ merupakan error yang memenuhi sifat *intrinsic stationarity* dengan $E[\varepsilon(x)] = 0$.

dimana :

α_l = koefisien *trend*

$f_l(x)$ = koordinat lokasi

n = banyaknya orde dalam persamaan *trend*.

Ricardo (1999) menyatakan bahwa, estimator $\hat{z}(x_0)$ adalah sebagai estimator tak bias, jika dan hanya jika :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_l(x_i) = f_l(x_0) \quad (3.5)$$

persamaan di atas sering disebut *universality condition* untuk $l = 1, 2, \dots, n$.

Jika persamaan (3.5) tersebut dikalikan dengan α_l maka akan diberikan $n + 1$ persamaan, yaitu:

$$\sum_{l=0}^n \alpha_l \sum_{i=1}^k \lambda_i f_l(x_i) = \sum_{l=0}^n \alpha_l f_l(x_0) \quad (3.6)$$

pada persamaan sebelah kiri, menurut Lemma 6.1 (Ricardo, 1999) jumlahan ganda akan bernilai sama dengan nilai ekspektasi dari $\hat{z}(x)$. Sedangkan pada persamaan sebelah kanan akan bernilai sama dengan $m(x)$, dan $m(x) = E[z(x)]$.

Jadi persamaan (3.6) akan menjadi:

$$E[\hat{z}(x) - z(x)] = 0$$

dari persamaan di atas nantinya akan didapatkan

$$\hat{z}(x) = m = z(x)$$

Maka dapat dikatakan bahwa estimator dari *Universal kriging* adalah estimator tak bias (*unbiased*). Selanjutnya dalam *universal kriging*, fungsi *trend* yang pertama $f_0(x)$ bernilai konstan, dengan $f_0(x) = 1$ sehingga berdasarkan *universality condition* diperoleh

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

dalam *Universal kriging*, penyamaan dengan nilai 1 diperlukan dalam kondisi untuk mendapatkan estimator tak bias.

3.2.1. Analisis Trend

Goovaerts (1997) menyatakan bahwa persamaan yang akan digunakan untuk memodelkan *trend* yang akan dipilih dari pendekatan polynomial orde rendah yaitu orde satu atau orde dua. Selanjutnya persamaan *polynomial trend* yang didapat akan digunakan untuk analisis lebih lanjut seperti perhitungan bobot dalam *Universal kriging*. Persamaan *polynomial trend* orde rendah (≤ 2) yang sering digunakan adalah:

1. Persamaan *Trend* orde satu di R^3

$$m(x) = m(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z$$

2. Persamaan *trend* kuadrat di R^3

$$m(x) = m(x, y, z)$$

$$= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_{10}xyz$$

dengan x, y, z merupakan koordinat lokasi.

3.2.2. BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*) *Universal Kriging*

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, bahwa estimator dari *kriging* bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*). Begitu juga dengan *Universal kriging* yang menghasilkan estimator BLUE atau estimator yang tak bias, linier dan meminimumkan variansi estimatornya. Berikutnya akan dibuktikan bahwa estimator *Universal kriging* juga bersifat BLUE.

3.2.2.1. *Unbiased*

Estimator *Universal kriging* merupakan estimator yang tak bias, hal ini dapat ditunjukkan dengan $\hat{z}(x) = m = z(x)$. Pada persamaan (3.5), estimator *Universal kriging* akan bersifat sebagai estimator tak bias jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_l(x_i) = f_l(x_0)$$

persamaan diatas disebut *universality condition* dengan $l = 1, 2, \dots, n$. Jika persamaan tersebut dikalikan dengan α_l , maka akan diberikan $n + 1$ persamaan, yaitu:

$$\sum_{l=0}^n \alpha_l \sum_{i=1}^k \lambda_i f_l(x_i) = \sum_{l=0}^n \alpha_l f_l(x_0)$$

pada (3.6), menurut Ricardo (1999) jumlahan ganda akan bernilai sama dengan nilai ekspektasi dari $\hat{z}(x)$. Sedangkan pada persamaan sebelah kanan akan bernilai sama dengan $m(x)$. Sehingga persamaan menjadi :

$$E[\hat{z}(x)] = m(x)$$

pada persamaan sebelumnya diketahui bahwa $m(x) = E[z(x)]$, sehingga

$$E[\hat{z}(x)] = E[z(x)]$$

pada persamaan (3.2) telah diketahui bahwa $E[z(x)] = z(x) = m$, maka dari persamaan (3.2) dan (3.7) didapat

$$\hat{z}(x) = m = z(x)$$

sehingga dari persamaan diatas diperoleh kesimpulan bahwa estimator *Universal kriging* merupakan *unbiased* atau estimator yang tak bias.

3.2.2.2. Linear

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa persamaan estimator *Universal kriging* adalah sebagai berikut :

$$\hat{z}(x_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i z(x_i)$$

dari persamaan diatas akan dibuktikan bahwa estimator *Universal kriging* $\hat{z}(x_0)$ merupakan estimator yang linier.

Dari persamaan tersebut, dapat dilihat bahwa estimator $\hat{z}(x_0)$ merupakan fungsi linier dari $z(x_i)$, karena memiliki n pengukuran kandungan mineral (cadangan) pada lokasi $1, 2, \dots, n$ yang dinyatakan dalam $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$ dan ingin di estimasi nilai $\hat{z}(x_0)$ yaitu nilai dari suatu titik tidak tersampel $\hat{z}(x_0)$, sekaligus sebagai kombinasi linier dari bobot bobot pengaruh dan titik-titik tersampel yang telah diketahui.

3.2.2.3. Best

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\hat{z}(x_0)$ merupakan estimator yang terbaik. Dengan menggunakan *Langrange Multiplier* akan meminimalkan variansi estimatornya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Var(\hat{z}(x_0)) &= var \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i z(x_i) \right] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \end{aligned}$$

Untuk membuktikan $\hat{z}(x_0)$ merupakan estimator terbaik dapat diselesaikan dengan meminimumkan persamaan sebagai berikut :

$$\min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \sigma^2 \sum_{i=1}^k \lambda_i^2, \text{ dimana } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

Selanjutnya dengan menggunakan *Langrange Multiplier* dapat digunakan untuk meminimalkan variansi estimatornya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L(\lambda, m) = \sigma^2 \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 - m \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1 \right] \quad (3.8)$$

persamaan (3.8) diturunkan terhadap $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan m , dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\frac{\partial L(\lambda, m)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad 2\sigma^2 \lambda_i - m = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial L(\lambda, m)}{\partial m} = 0, \quad - \sum_{i=1}^k \lambda_i + 1 = 0 \quad (3.10)$$

dari persamaan (3.9) diperoleh bahwa

$$\lambda_i = \frac{m}{2\sigma^2}, \text{ berakibat } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \dots = \lambda_n$$

kemudian dari persamaan (3.10) diperoleh

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ sehingga } \lambda_i = \frac{1}{n} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

dengan demikian diperoleh :

$$\hat{z}(x_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i z(x_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} z(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z(x_i) = \hat{z}(x)$$

Syarat minimumnya turunan kedua pada persamaan (3.9) adalah

$$\frac{\partial L(\lambda, m)}{\partial m} > 0, \text{ didapat } 2\sigma^2 > 0$$

sehingga dapat dikatakan bahwa variansi estimatornya minimum. Kemudian menentukan nilai koefisien pembobotan λ_i yang meminimalkan estimasi variansi *error* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(e(z(x_0)) \right) &= E[z(x_0) - \hat{z}(x_0)]^2 \\ &= E \left[z(x_0) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^k \lambda_i z(x_i) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

dari persamaan (3.11) dengan asumsi bahwa

$$2\gamma(h) = \text{Var}(z(x+h) - z(x))$$

diperoleh

$$\text{Var}(e(x_0)) = - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) \quad (3.12)$$

Selanjutnya digunakan *Lagrange Multiplier* untuk meminimalkan estimasi variansi *error* dengan parameter $m_0, m_1, m_2, \dots, m_p$ sebagai berikut :

$$F(\lambda, m) = - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j)$$

$$-2 \sum_{t=1}^{p+1} m_{i-1} \left[\sum_{l=1}^k \lambda_i f_{t-1}(x_i) - f_{t-1}(x_0) \right] \quad (3.13)$$

Untuk meminimalkan estimasi variansi *error*, persamaan (3.13) diturunkan terhadap $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ dan dijabarkan sebagai berikut :

$$\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial \lambda_1} = 0, \quad -2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_1 - x_j) + 2\gamma(x_0 - x_1) - 2 \sum_{t=0}^p m_t f_t = 0$$

$$\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial \lambda_2} = 0, \quad -2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_2 - x_j) + 2\gamma(x_0 - x_2) - 2 \sum_{t=0}^p m_t f_t = 0$$

$$\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial \lambda_3} = 0, \quad -2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_3 - x_j) + 2\gamma(x_0 - x_3) - 2 \sum_{t=0}^p m_t f_t = 0$$

$$\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial \lambda_4} = 0, \quad -2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_4 - x_j) + 2\gamma(x_0 - x_4) - 2 \sum_{t=0}^p m_t f_t = 0$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

$$\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial \lambda_n} = 0, \quad -2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_n - x_j) + 2\gamma(x_0 - x_n) - 2 \sum_{t=0}^p m_t f_t = 0$$

generalisasi dari penjabaran di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_i - x_j) - \gamma(x_0 - x_i) + \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_i) &= 0 \\ \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_i - x_j) + \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_i) &= \gamma(x_0 - x_i), \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.14)$$

langkah berikutnya, persamaan (3.13) diturunkan terhadap $m_0, m_1, m_2, \dots, m_p$ dan dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial m_0} &= 0, & -2 \sum_{j=1}^k \lambda_j f_0(x_j) + 2f_0(x_0) &= 0 \\
\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial m_1} &= 0, & -2 \sum_{j=1}^k \lambda_j f_1(x_j) + 2f_1(x_0) &= 0 \\
\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial m_2} &= 0, & -2 \sum_{j=1}^k \lambda_j f_2(x_j) + 2f_2(x_0) &= 0 \\
&\vdots & \vdots & \\
&\vdots & \vdots & \\
&\vdots & \vdots & \\
\frac{\partial F(\lambda, m)}{\partial m_p} &= 0, & -2 \sum_{j=1}^k \lambda_j f_p(x_j) + 2f_p(x_0) &= 0
\end{aligned}$$

generalisasi dari penjabaran sebelumnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j f_t(x_j) - f_t(x_0) = 0, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, p$$

didapat

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j f_t(x_j) = f_t(x_0) \quad (3.15)$$

untuk $t = 0$ didapat

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j f_0(x_j) = f_0(x_0), \text{ karena } f_0(x) = 1 \text{ maka } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

dari persamaan (3.14) dan (3.15) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_i - x_j) + \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_i) = \gamma(x_0 - x_i) , \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j f_0(x_j) = f_0(x_0), \text{ untuk } t = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

dengan melakukan substitusi dari persamaan (3.16) ke dalam persamaan (3.12),

variansi *error* dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Var(e(x_0)) &= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) \\ &= - \sum_{j=1}^k \lambda_i \left[\gamma(x_0 - x_j) - \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_0) \right] + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) \\ &= - \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_0) + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_0) \\ Var(e(x_0)) &= \sum_{j=1}^k \lambda_i \gamma(x_0 - x_j) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{t=0}^p m_t f_t(x_0) \end{aligned}$$

secara umum (3.16) dalam notasi matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \gamma(s_i - s_j) & f_t(s_i) \\ f_t(s_j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_j \\ m_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(s_0 - s_i) \\ f_t(s_0) \end{bmatrix} , \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n \text{ dan } t = 0, 1, \dots, p$$

dengan notasi matriks di atas, maka dapat dihitung matriks bobot dari *Universal*

Kriging , yaitu :

$$\begin{bmatrix} \lambda_j \\ m_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(s_i - s_j) & f_t(s_i) \\ f_t(s_j) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma(s_0 - s_i) \\ f_t(s_0) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dimana :

- $\gamma(s_i - s_j)$ = *semivariogram* antar titik-titik tersampel
 - $\gamma(s_0 - s_i)$ = *semivariogram* antar titik tersampel dengan titik estimasi
 - $f_t(s_i), f_t(s_j)$ = koordinat lokasi dari data tersampel
 - λ_j = nilai dari bobot yang akan dicari
 - m_t = nilai dari parameter *Lagrange*
 - (s_i, s_j) = lokasi dari data tersampel
 - s_0 = lokasi dari data yang ingin diestimasi
 - p = banyaknya orde dalam persamaan *trend*
- Jika persamaan *trend* yang diperoleh berorde satu di R^3 dengan persamaan

sebagai berikut:

$$m(s) = m(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z$$

dimana x,y,z adalah koordinat lokasi titik tersampel, maka untuk persamaan

(3.16) menjadi seperti berikut ini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(s_i - s_j) + m_0 + m_1x_i + m_2y_i + m_3z_i = \gamma(s_0 - s_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = x \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = y \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j = z \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{array} \right.$$

jika direpresentasikan ke dalam bentuk matriks maka akan dihasilkan seperti berikut ini :

$$K_{KT} \lambda_{KT} = k_{KT}$$

dan matriks matriks bobotnya menjadi

$$\lambda_{KT} = K_{KT}^{-1} k_{KT}$$

dengan

$$K_{KT} = \begin{bmatrix} \gamma(s_1 - s_1) & \dots & \gamma(s_1 - s_n) & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(s_n - s_1) & \dots & \gamma(s_n - s_n) & 1 & x_n & y_n & z_n \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & \dots & z_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{KT} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}, \quad k_{KT} = \begin{bmatrix} \gamma(s_0 - s_1) \\ \vdots \\ \gamma(s_0 - s_n) \\ 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3.2.3. Second Order Stationary dari Universal Kriging

Dalam *Universal Kriging*, data mempunyai kecenderungan tertentu yaitu terdapat pola perubahan rata-rata seiring dengan berbedanya lokasi, sehingga sifat *second-order stationarity* (stasioner orde dua) tidak berlaku. Dikatakan stasioner orde dua jika memenuhi syarat-syarat, diantaranya rata-rata konstan untuk setiap lokasi. Untuk itu dapat dibuktikan sifat *non-stationarity* dari *Universal Kriging* yaitu:

$$\begin{aligned}
 E[z(x)] &= E[m(x) + \varepsilon(x)] = E[m(x)] + E[\varepsilon(x)] \\
 &= E[m(x)] = E\left[\sum_{l=0}^n \alpha_l f_l(x)\right]
 \end{aligned}$$

terlihat bahwa $E[z(x)]$ tergantung pada lokasi (x) . Sehingga dapat disimpulkan bahwa model pada *Universal Kriging* mempunyai kecenderungan *trend* tertentu.

3.2.4. Semivariogram Universal Kriging

Semivariogram adalah perangkat dasar dari geostatistik untuk visualisasi, pemodelan dan *eksploitasi autokorelasi spasial* dari variabel terregionalisasi. *Variogram* adalah ukuran dari variansi, sedangkan *semivariogram* adalah setengah dari nilai *variogram*. Taksiran *semivariogram universal kriging* pada jarak (h) dituliskan dalam persamaan sebagai berikut :

$$2\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(s_i + h) - m(s_i + h) - z(s_i) + m(s_i)]^2 \quad (3.18)$$

dengan $N(h)$ adalah banyaknya pasangan data untuk jarak h dan $m(s)$ adalah persamaan *trend*.

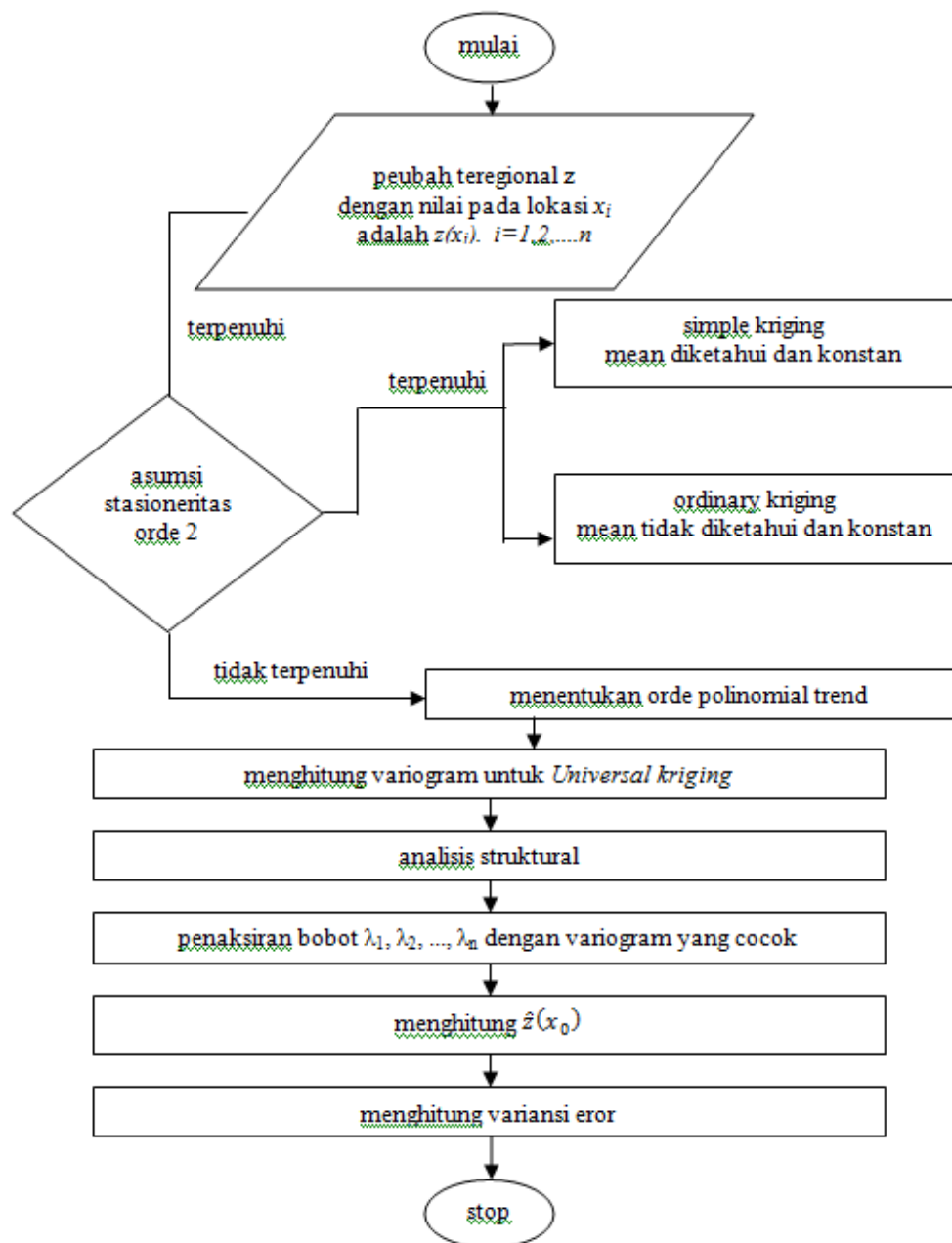
3.3. Algoritma pengestimasi

Dalam menganalisis atau mengestimasi suatu data, diperlukan beberapa langkah sebagai berikut :

1. Memplotkan data kedalam 3D untuk mengetahui kecenderungan *trend*.
2. Melakukan analisis *trend* dengan memplotkan nilai data kandungan dengan koordinat lokasinya x, y, z .
3. Melakukan perhitungan *semivariogram* untuk *Universal kriging* .

4. Melakukan analisis struktural, dengan membandingkan *semivariogram* untuk *Universal kriging* dari perhitungan dengan *semivariogram teoritis*, kemudian dipilih *semivariogram teoritis* terkecil.
5. Menghitung nilai bobot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan menggunakan *variogram* yang telah dihitung pada analisis struktural.
6. Menghitung $\hat{z}(x_0)$ atau estimasi kandungan mineral beserta variansi *error*nya.

3.4. Diagram pengestimasian kandungan air tanah menggunakan metode *Universal kriging*



Gambar 3.1. Diagram langkah estimasi *Universal kriging*

3.5. Aplikasi

Tujuan yang ingin dicapai dari tulisan ini adalah ingin mengetahui seberapa besar kandungan air tanah setelah di estimasi dengan menggunakan metode *Universal Kriging*. Perlu diketahui bahwa air tanah memiliki karakteristik

dengan bertambahnya *porositas* air mengikuti pertambahan kedalamannya yang berarti bahwa kandungan air tanah akan semakin besar apabila letaknya semakin dalam. Karakteristik seperti ini merupakan kecenderungan *trend* dari air tanah dan juga dianggap cocok untuk dilakukan uji estimasi kandungan air tanah dengan metode *Universal Kriging*.

3.5.1. Definisi Air Tanah

Air tanah didefinisikan sebagai semua air yang terdapat dalam ruang batuan dasar atau aliran yang secara alami mengalir ke permukaan tanah melalui pancaran atau rembesan. Menurut (Linsley, 1996: 80) *deposit glasial* pasir dan kerikil, dan *deposit delta* pasir merupakan sumber-sumber air yang sangat baik. Air tanah yang berasal dari peresapan air permukaan disebut air meteorik (*meteoric water*).

Jumlah air tanah yang dapat di simpan dalam batuan dasar, sedimen dan tanah sangat bergantung pada *permeabilitas*. *Permeabilitas* merupakan kemampuan batuan atau tanah untuk melewatkan atau meloloskan air. Air tanah mengalir melewati rongga-rongga yang kecil, semakin kecil rongganya semakin lambat alirannya. *Porositas* sangat berpengaruh pada aliran dan jumlah air tanah. *Porositas* adalah jumlah atau persentase pori atau rongga dalam total volume batuan atau sedimen. *Porositas* dapat di bagi menjadi dua yaitu *porositas primer* dan *porositas sekunder*. *Porositas primer* adalah *porositas* yang ada sewaktu bahan tersebut terbentuk sedangkan *porositas sekunder* di hasilkan oleh retakan-retakan dan alur yang terurai.

Porositas merupakan angka tidak berdimensi yang diwujudkan dalam bentuk %. *Porositas* untuk tanah normal berkisar antara 25 % sampai 75 %, sedangkan untuk batuan yang *terkonsolidasi* berkisar antara 0 sampai 10 %. Tanah berbutir halus mempunyai *porositas* yang lebih besar dibandingkan dengan tanah berbutir kasar.

3.5.2. Pendeskripsian Data

Data yang diperoleh adalah sebuah gambaran data yang menjelaskan koordinat lokasi dan *porositas* dari sebuah pengeboran air tanah. Seperti pada umumnya suatu pengeboran membutuhkan koordinat lokasi untuk menentukan letak titik bor dari suatu mineral dan juga suatu ukuran dari jumlah kandungan suatu mineral yang sebelumnya atau dalam hal ini merupakan *porositas*. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa *porositas* sangat berpengaruh pada jumlah kandungan air tanah yang di bawanya maka yang di jadikan ukuran untuk pengestimasian adalah *porositasnya*.

Data yang dipakai merupakan data yang terdiri dari koordinat lokasi x (*x-coordinat*), koordinat lokasi y (*y-coordinat*), kedalaman (*z-coordinat*), dan porosity (*sebagai ukuran kandungan air tanah*).

Berikut ini adalah tabel data *porositas* air tanah.

No	x	y	Z	Porosity
1	1.86	4.629	25	10.9
2	2.362	4.874	35	12.3
3	2.097	4.611	24	12.7
4	1.55	4.437	28	9.1

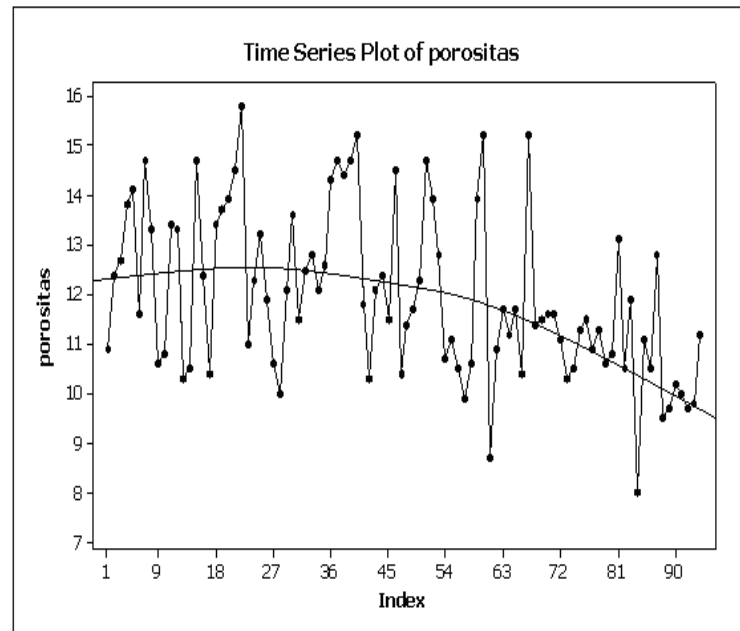
5	1.863	4.37	18	14.1
6	2.112	4.371	32	11.6
7	2.175	4.317	35	11.2
8	2.233	4.253	42	13.3
9	1.421	4.075	25	12.3
10	1.634	4.136	27	15.2
11	1.88	4.126	20	14.7
...
...
...
...
85	1.4	0.874	32	11.1
86	1.592	0.899	33	10.5
87	1.849	0.872	36	10.4
88	1.12	0.616	26	9.5
89	1.397	0.619	28	9.7
90	1.623	0.639	33	10.2
91	1.852	0.643	41	10
92	1.374	0.371	32	9.7
93	1.621	0.4	36	9.8
94	1.375	0.143	36	8.7

Tabel 3.1. Tabel data *porositas* dengan koordinat lokasinya
(data selengkapnya dapat dilihat pada lampiran)

Tabel 3.1 di atas merupakan data yang terdiri dari 94 data *porositas* air tanah beserta letak koordinat lokasinya. Dari tabel di atas diketahui koordinat lokasi x meter, y meter, z meter dan juga diperoleh *porositas* air tanah dalam % (telah dijelaskan sebelumnya bahwa *porositas* dinyatakan dalam bentuk %).

Kemudian ke-94 data dari tabel di atas akan dilakukan plot untuk mengetahui titik titik sebaran dari *porositas* air tanah tersebut. Plot data dilakukan dengan menggunakan program Minitab 15. Tujuan dari pengeplotan ini adalah untuk mengetahui apakah data yang diperoleh mempunyai kestasioneritasan atau tidak. Kestasioneritasan akan nampak setelah titik titik tersebut di plotkan dan dari

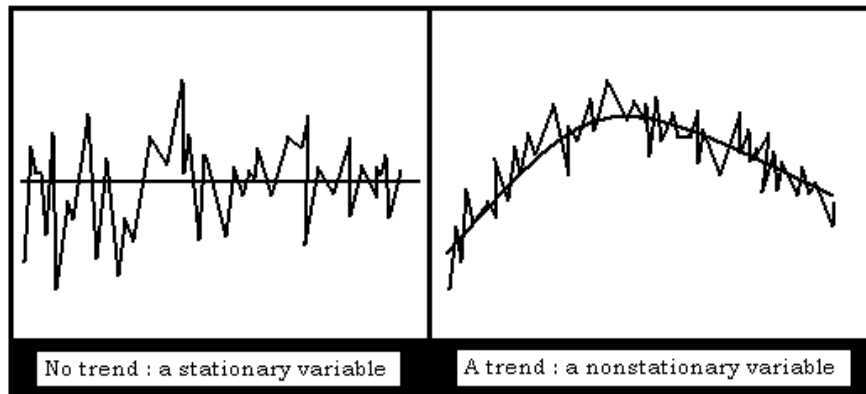
situ akan terlihat apakah ada kecenderungan *trend* tertentu atau tidak. Berikut ini adalah plot sebaran data dari tabel di atas.



Gambar 3.2. Plot sebaran data dengan Minitab 15

Untuk memudahkan gambaran tentang tingkat stasioneran, berikut ini adalah tampilan dua buah grafik stasioneritasan. Grafik sebelah kiri merupakan variabel stasioner sedangkan grafik sebelah kiri merupakan variabel nonstasioner. (Suprajitno, 2005 : 6) menyatakan tampilan grafik stasioner dan nonstasioner.

Berikut ini adalah grafik stasioner dan nonstasioner.

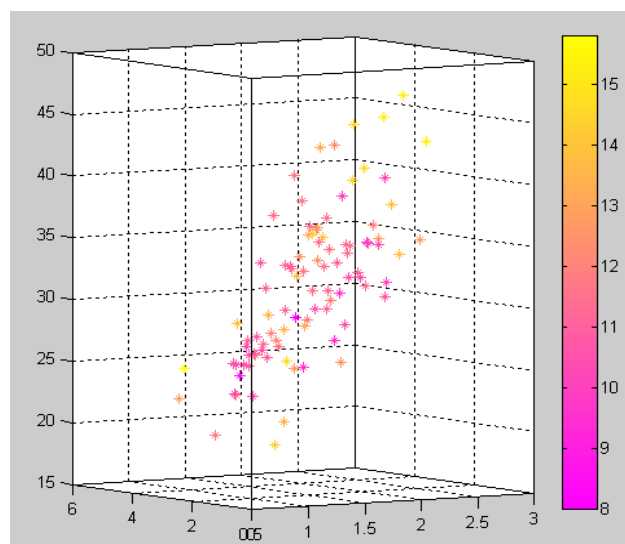


Gambar 3.3. *Stationary variable* dan *Non-stationary variable*

Sebuah variabel stasioner tidak memiliki sebuah *trend* sedangkan variabel non-stasioner jika kita lihat terdapat lengkungan dari semua variabelnya, hal itulah yang kemudian dinamakan *trend* dari variabel non-stasioner. Setelah melihat dan membandingkan pada Gambar 3.2 dengan Gambar 3.3, maka dari hasil plot pada Gambar 3.2 di atas memiliki sebuah lengkungan atau dengan kata lain plot dari ke-94 data pada Tabel 3.1 diatas memiliki kecenderungan *trend*, sehingga plot data diatas dapat digolongkan ke dalam variabel non-stasioner.

Kestasioneran juga dapat dibuktikan dengan ada atau tidaknya sebuah gradasi warna dari data tersebut. Untuk itu data dari Tabel 3.1 akan di plotkan kedalam grafik 3D dengan menggunakan bantuan Matlab R2008a. Setelah dilakukan plot

data 3D maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.



Gambar 3.4. Plot 3D ke dalam Matlab

Dari gambar diatas dapat kita lihat bahwa sumbu x dan sumbu y menyatakan koordinat lokasi, sedangkan sumbu z menyatakan kedalaman. Sedangkan titik-titik yang tersebar menunjukkan *porositas* dan warna dari titik-titik tersebut tergantung dari koordinat lokasinya. Jika kita amati secara keseluruhan terdapat gradasi warna dari ungu menuju ke kuning berdasarakan bertambahnya kedalaman, yaitu dari kedalaman yang berkisar antara 8 m sampai 16 m. Dapat dikatakan bahwa plot diatas mengandung kecenderungan *trend* tertentu sehingga dapat terlihat semakin bertambahnya kedalaman (z), maka kandungan atau cadangan air semakin besar pula. Berdasarkan bukti-bukti diatas maka data tersebut digolongkan variabel non-stasioner.

Setelah dilakukan plotting data, untuk mengetahui ringkasan dari data tersebut dilakukan ringkasan data dari tabel di atas. Ringkasan data dari Tabel 3.1 dilakukan dalam program R dengan bantuan *summary*. Ringkasan datanya sebagai berikut.

	x	y	Z	<i>Porositas</i>
Minimum	0.614	0.143	18	8
1st Quartil	1.369	1.627	27	10
Median	1.616	2.385	32	11.6
Mean	1.665	2.500	31.69	11.96
3rd Quartil	2.024	3.381	35	13.28
Maximum	2.612	4.874	47	15.8

Tabel 3.2. Ringkasan data

Dari ringkasan data di atas dapat dilihat bahwa koordinat x (absis x) mempunyai nilai minimum **0.614 m** dan maksimalnya **2.612 m**, koordinat y (ordinat y)

memiliki nilai minimum **0.143 m** dan nilai maksimal **4.874 m**, koordinat z (kedalaman) memiliki nilai minimum **18 m** dan nilai maksimal **47 m**, sedangkan untuk *porositas* atau kandungan air tanah memiliki nilai minimum **8 m** dan nilai maksimalnya **15.8 m**.

3.5.3. Sistem Pemrograman

Dalam mempermudah analisis data, maka digunakan program-program yang berkaitan dengan pengestimasian data tersebut. Program yang digunakan adalah program R dan juga program Matlab. Program R digunakan untuk menjalankan proses estimasi kandungan air tanah, dengan beberapa *packages* tertentu yang dipakai untuk menghitung nilai *semivariogram* yang dibutuhkan dalam metode *Universal kriging*, sedangkan program Matlab digunakan untuk membuat peta sebaran data kandungan air tanah, agar nantinya dapat mempermudah dalam proses visualisasi data.

3.5.4. Asumsi Non-Stasioneritas Data

Dengan melakukan pengamatan pada gambar plot sebaran data dari tabel gambar di atas, maka uji stasioneritas dapat dilakukan. Data dikatakan stasioner jika sebaran data pada lokasi tertentu mempunyai sebaran data yang acak atau tidak bergantung pada lokasi atau faktor apapun. Sebaliknya data dikatakan non-stasioner jika data mempunyai sebaran yang teratur (tidak acak) dan juga bergantung pada faktor tertentu.

Dari tabel gambar di atas dapat dilihat secara visualisasi bahwa terdapat gradasi warna dari ungu ke kuning pada sebaran data tersebut. Ini dapat dikatakan bahwa data tersebut mempunyai ketergantungan oleh faktor tertentu. Dapat

dikatakan juga bahwa data dikatakan stasioner jika tidak terdapat gradasi warna pada sebaran datanya, sedangkan dikatakan non-stasioner jika terdapat gradasi warna dalam sebaran datanya. Sehingga dapat dikatakan bahwa sebaran data kandungan air tanah merupakan data non-stasioner, yang juga terdapat pola kecenderungan terhadap kedalaman.

3.5.5. Analisis Data

Akan dilakukan analisis regresi sederhana dengan SPSS untuk mengetahui hubungan antara kedalaman (z) dengan *porositas* (p). Berikut ini adalah langkah-langkah analisis data yang harus dilakukan dalam SPSS untuk mendapatkan output yang dihasilkan adalah :

1. Masukkan data kedalaman (z) dan *porositas* (p) pada Data View dengan kolom pertama adalah data kedalaman (z) dengan label kedalaman, kemudian kolom kedua adalah data *porositas* (p) dengan label *porositas*.
2. Pilih Analyze – Regression – Curve Estimation
3. Masukkan variabel kedalaman pada independent list dan variabel *porositas* pada dependent list.
4. Pada Models pilih Linear, kemudian klik continue.
5. Aktifkan Display ANOVA Table, klik OK.
6. Tabel Output dapat dilihat sebagai berikut :

ANOVA

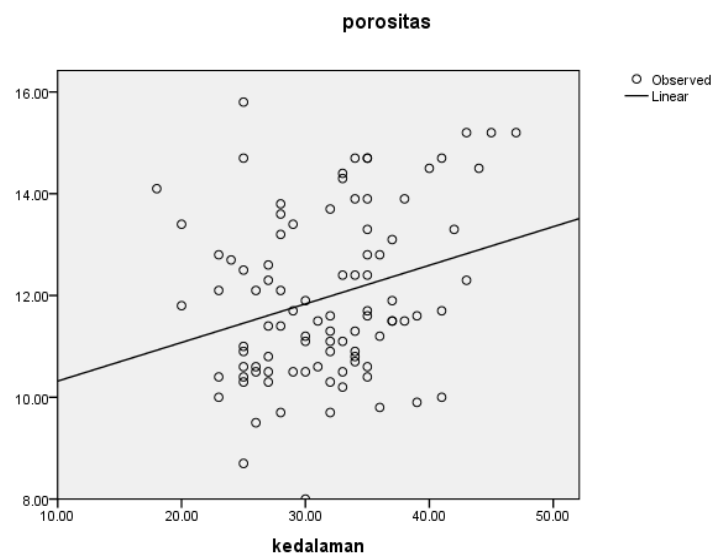
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	19.397	1	19.397	7.457	.008
Residual	239.300	92	2.601		
Total	258.697	93			

The independent variable is kedalaman.

Tabel 3.3. Tabel Anova

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
kedalaman	.076	.028	.274	2.731	.008
(Constant)	9.560	.896		10.673	.000

Tabel 3.4. Tabel *Coefficients*Gambar 3.5. Plot hubungan kedalaman (z) dengan *porositas* (p)

1. Uji kecocokan model linier

- Hipotesis :

H_0 : Regresi linier tidak cocok digunakan

H_1 : Regresi linier cocok digunakan

- Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

- Statistik uji : Uji F

- Kriteria keputusan

H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{\alpha, db = (1, N-2)}$ atau

H_0 ditolak jika nilai sig. (tabel) $< \alpha = 0,05$

- Kesimpulan :

Dari tabel Anova di atas nilai $F_{hitung} = 7,457 > F_{0,05(1,92)} = 3,948$ maka H_0 ditolak, sedangkan untuk nilai sig. (tabel) $= 0,008 < \text{taraf sig. } \alpha = 0,05$ juga menolak H_0 berarti H_1 diterima atau dengan kata lain Model regresi linier cocok di gunakan.

2. Uji signifikansi koefisien

- Hipotesis :

H_0 : Koefisien regresi tidak signifikan

H_1 : Koefisien regresi signifikan

- Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

- Statistik uji : Uji T

- Kriteria keputusan

H_0 ditolak jika $T_{hit} > T_{\alpha, db = N-2}$ atau

H_0 ditolak jika nilai sig. (tabel) $< \alpha/2 = 0,025$

- Kesimpulan :

Dari tabel coefficients nilai $T_{hit} = 2,731 > T_{(0,05,92)} = 1,9884$ sedangkan nilai sig. (tabel) $= 0,008 < \alpha/2 = 0,025$ dari kriteria keputusan diatas maka dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak atau dengan kata lain H_1 diterima sehingga koefisien regresi signifikan atau kedalaman berpengaruh secara signifikan terhadap *porositas*.

Selanjutnya yaitu kita mendapatkan persamaan regresi dari output yang dihasilkan untuk memprediksi variabel Y, yaitu : $Y = 9,560 + 0,76 X$ dengan Y adalah *porositas* dan X adalah kedalaman. Atau persamaan regresi tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$porositas = 9,560 + 0,76 \text{ nilai kedalaman.}$$

Artinya jika nilai kedalaman sama dengan nol (0) maka nilai *porositas* sama dengan 9,560 sedangkan jika nilai kedalaman naik sebanyak satu satuan maka nilai *porositas* akan bertambah sebanyak 0,76 satuan.

3. Plot hubungan kedalaman (z) dengan *porositas* (p).

Dari plot hasil SPSS pada gambar 3.5 di atas menunjukkan bahwa titik-titik berada disekitar garis regresi, maka dapat dikatakan bahwa kedalaman dengan *porositas* mempunyai hubungan. Sedangkan untuk tabel summary dapat dilihat bahwa nilai *R-square* yakni sebesar 7,5 % mampu menerangkan nilai *porositas*.

3.5.6. *Semivariogram Universal Kriging* dan Analisis Struktural

Untuk membuat *semivariogram* universal kriging, yang diperlukan adalah membuat pasangan data tersampel dengan $C(n, 2)$ dengan n adalah banyaknya data. Diketahui bahwa data berjumlah 94 data, maka dengan $C(n, 2)$ atau

$C(94,2)$ dihasilkan sejumlah 4371 pasangan data. Dengan bantuan package *gstat* dan *sp* pada program R, maka akan dicari nilai *sill* dari pasangan data tersebut.

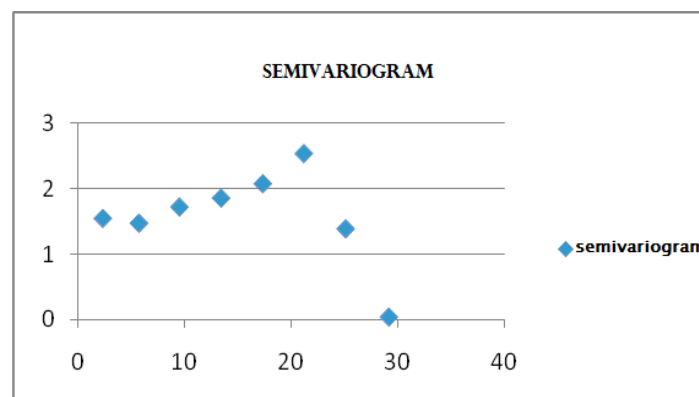
3.5.6.1. Semivariogram air tanah

Pasangan	Jarak	Semivariogram
1320	2.296199	1.54591888
1330	5.682387	1.47210135
949	9.484032	1.72045075
468	13.386888	1.85795675
219	17.29404	2.07796541
69	21.138926	2.54051039
15	25.054769	1.38658449
1	29.111022	0.03289168

Tabel 3.5. Tabel *semivariogram* beserta pasangan data dan jaraknya.

Dari hasil perhitungan *semivariogram* air tanah tersebut, diperoleh jumlah pasangan data pada masing-masing kelas dan juga jarak dari setiap pasangan data beserta nilai *semivariogram*nya.

Sedangkan plot *semivariogram*nya sebagai berikut :



Gambar 3.6. Plot *semivariogram eksperimental* air tanah

Dari gambar 4 di atas nilai *semivariogram* terlihat stabil setelah mencapai jarak 21.13 (meter) dengan nilai *semivariogram* 2.54 (meter), sedangkan nilai *sill* (h) = 2.781688. Hasil analisis struktural diperoleh *semivariogram* dengan model

exponential, model tersebut diambil setelah di bandingkan dengan beberapa semivariogram yang dianggap cocok dengan metode *Universal kriging*.

3.5.7. Estimasi kandungan air tanah

Dari data pada Tabel 3.1 didapatkan sebanyak 17307 lokasi yang akan diestimasi. Setelah dilakukan estimasi data dengan program R maka di dapatkan hasil estimasi beserta variansi *error*nya. Berikut adalah table hasil estimasinya.

Tabel hasil estimasi.

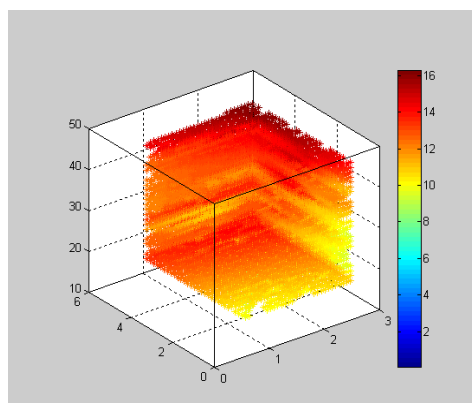
Coordinat	estimasi cadangan	variansi eror
(0.614, 0.142, 19)	9.941477	0.7171010
(0.68, 0.142, 19)	9.969810	0.7154581
(1.01, 0.142, 19)	10.111723	0.7155482
(1.076, 0.142, 19)	10.140204	0.7172059
(1.142, 0.142, 19)	10.168736	0.7194003
(1.208, 0.142, 19)	10.197322	0.7221260
(1.274, 0.142, 19)	10.225971	0.7253772
(1.34, 0.142, 19)	10.254688	0.7291476
(1.406, 0.142, 19)	10.283480	0.7334307
(1.472, 0.142, 19)	10.312351	0.7382193
(1.868, 0.142, 19)	10.487541	0.7771576
(1.934, 0.142, 19)	10.517109	0.7852779
(2, 0.142, 19)	10.546793	0.7938440
(2.066, 0.142, 19)	10.576597	0.8028488
(2.132, 0.142, 19)	10.606523	0.8122852
(2.198, 0.142, 19)	10.636574	0.8221464
...
...
...
(1.406, 4.65, 47.8)	15.34858	0.7979983
(1.472, 4.65, 47.8)	15.40386	0.7886325
(1.538, 4.65, 47.8)	15.45900	0.7798260
(1.604, 4.65, 47.8)	15.51400	0.7715848
(1.67, 4.65, 47.8)	15.56882	0.7639147
(1.736, 4.65, 47.8)	15.62346	0.7568210
(2.396, 4.65, 47.8)	16.15737	0.7185050

(2.066, 4.811, 47.8)	15.94245	0.7680368
(2.132, 4.811, 47.8)	15.99543	0.7644768
(2.198, 4.811, 47.8)	16.04818	0.7615052
(2.264, 4.811, 47.8)	16.10067	0.7591236
(2.33, 4.811, 47.8)	16.15291	0.7573333
(2.396, 4.811, 47.8)	16.20489	0.7561349
(2.462, 4.811, 47.8)	16.25659	0.7555286
(2.528, 4.811, 47.8)	16.30802	0.7555143

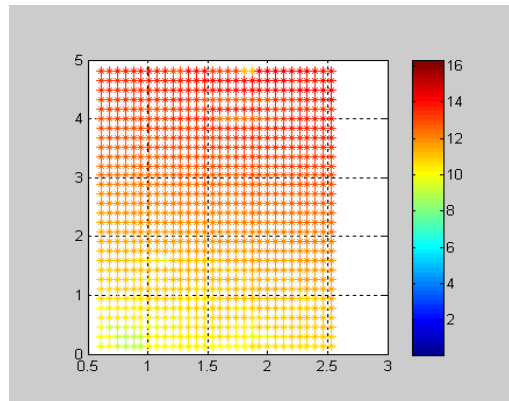
Tabel 3.6. Tabel hasil estimasi kandungan air tanah beserta variansi *error*.

Dari tabel hasil estimasi akan di lihat plot gambar dari hasil cadangan estimasi berdasarkan koordinat lokasinya (x,y,z). Plot 3D data di atas menggunakan bantuan Matlab, kemudian akan di lihat dari berbagai sudut pandang berdasarkan koordinatnya. Hasil plot akan menunjukkan letak dari titik titik estimasi dan juga gradasi warna sesuai dengan tingkat kedalaman dari hasil estimasi kandungan air tanah.

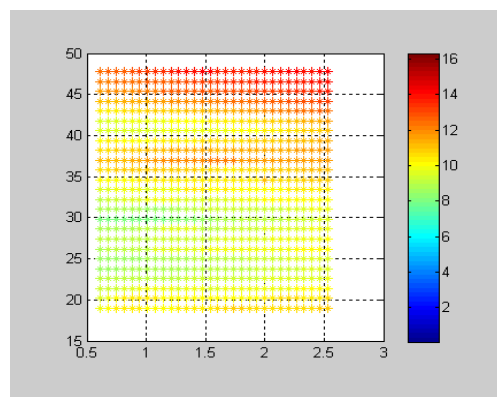
Berikut ini adalah plot 3D hasil estimasi kandungan air tanah dengan Matlab.



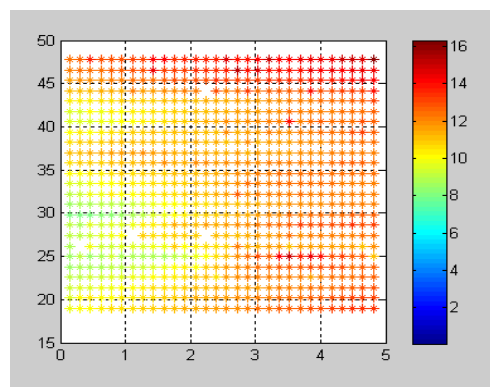
Gambar 3.7. Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat x,y,dan z



Gambar 3.8. Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat x dan z



Gambar 3.9. Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat y dan z



Gambar 3.10. Plot hasil estimasi kandungan air tanah dari koordinat x dan y

Secara praktis dari ke empat plot data tersebut terdapat gradasi warna, dari kuning menuju ke merah, maka plot data di atas menunjukkan hubungan antara

kedalaman dengan kandungan air tanah yaitu jika semakin dalam (z) maka kandungan air tanah akan bertambah banyak juga.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Setelah melakukan analisis data dan mengetahui hasil estimasi beserta plot data hasil estimasi dengan metode *Universal kriging*, maka kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut ini :

1. *Universal kriging* adalah salah satu metode dari *kriging* untuk memprediksi atau mengestimasi kandungan mineral dalam pertambangan. Metode *Universal kriging* ini diterapkan pada data yang mempunyai kecenderungan trend tertentu atau data yang *non-stasioner*.
2. Estimator yang dihasilkan pada metode *Universal kriging* adalah estimator yang bersifat BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*) yaitu estimator yang tidak bias, *linier* dan punya nilai variansi estimator minimum.
3. Berikut adalah langkah langkah estimasi kandungan mineral dengan menggunakan *Universal kriging* :
 - a. Menggambarkan data atau memplotkan data kedalam grafik 3D untuk mengetahui kecenderungan trend.
 - b. Melakukan analisis trend dengan memplotkan nilai data kandungan dengan koordinat lokasinya (x,y,z).

- c. Melakukan perhitungan *semivariogram* untuk *Universal kriging*.
 - d. Membandingkan *semivariogram* dari perhitungan dengan *semivariogram teoritis*, kemudian dipilih *semivariogram teoritis* yang dianggap paling mendekati dan yang paling minimum dengan *semivariogram* dari *Universal kriging*.
4. Pada kasus ini, *Universal kriging* diaplikasikan untuk mengestimasi kandungan air tanah. Data air tanah yang di peroleh sebanyak 94 data yang terdiri dari koordinat lokasi beserta kandungan air tanah yang berada di Kansas. Setelah melalui uji stasioneritas dan analisis trend, diketahui bahwa ke-94 data tersebut merupakan data non-stasioner dan juga memiliki trend. Kemudian dilakukan estimasi sebanyak 17307 lokasi yang diperoleh dari kombinasi linier ke-94 koordinat lokasi dari data tersampel tersebut. Dari 17307 data tersebut di lakukan perhitungan *semivariogram* dengan menggunakan program R. Hasil perhitungan dengan program R didapatkan nilai 2,781688. Setelah diketahui nilai *sill* tersebut, kemudian dilakukan analisis struktural dengan bantuan Ms. Excel sehingga diperoleh nilai *sill* yang mendekati 2,781688 yaitu sebesar 2,54051 dan nilai range sebesar 20,02. Dari perhitungan ini dipilih *semivariogram teoritis* model *eksponensial*. Dipilihnya model *eksponensial* dikarenakan *semivariogram* ini mempunyai nilai MSE yang terkecil dari pada model *gauss* dan *model spherical*. Setelah didapatkan

semivariogram model *eksponensial* maka estimasi kandungan air tanah beserta *variansi error* dari 17307 lokasi dapat dihitung.

B. Saran

Metode *Universal kriging* ini hanya mampu mengestimasi data tambang yang bersifat non-stasioner dikarenakan data yang diestimasi mempunyai kecenderungan trend. Sedangkan data-data tambang yang tidak memiliki trend atau yang bersifat stasioner dapat dilakukan estimasi dengan menggunakan metode *Ordinary kriging*. Dalam suatu pertambangan, biasanya juga akan ditemukan beberapa kandungan mineral lain yang mungkin berpengaruh terhadap kandungan mineral yang diestimasi. Untuk mengatasi hal tersebut dibutuhkan metode estimasi *Universal co-kriging*. *Universal co-kriging* ini merupakan metode estimasi yang memperhitungkan koefisien dari variabel lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. (1995). *Aljabar Linear Elementer (edisi kelima)*. (Terjemahan oleh Pantur Silaban & I. Nyoman Susila). Jakarta: Erlangga.
- Away, Gunaidi A. (2006). *The Shortcut of MATLAB Programming*. Bandung : Informatika.
- Bain & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics 2nd Edition*. California: Duxbury Press.
- Bohling, G. (2005). *Kriging*. Tersedia di <http://people.ku.edu/~gbohling/cpe940>. diakses tanggal 15 Oktober 2009.
- Chiles, Jean-Paul. (1999). *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. John Wiley and Sons, Inc. Canada.
- Cressie, N. A. C. (1993). *Statistics For Spatial Data*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Gauss-Markov Theorem. Tersedia di <http://econweb.rutgers.edu/tsurumi/blue1.pdf> diakses tanggal 12 Oktober 2010.
- Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for Natural Resource Evaluation*. Oxford University Press, New York
- Judge, G.G. et al. (1982). *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. John Wiley and Sons, Inc, New York.
- Linsley, R. K. (1996). *Hidrologi Untuk Insinyur*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Olea, Ricardo A. (1999). *Geostatistics for engineers and earth scientists*. Kluwer Academic Publishers. United States of America.
- Riwidikdo, H. (2008). *Statistika Terapan dengan Program R versi 2.5.1 (open source)*. Jogjakarta : MITRA CENDEKIA Press.
- Santosa, B. (2007). *Data Mining Terapan MATLAB*. Yogyakarta : GRAHA ILMU.

Santosa, Purbayu B. (2005). *Analisis Statistika dengan Microsoft Excel & SPSS*. Yogyakarta : Andi.

Setyadji, B. (2005). Data Geostatistik. Tersedia di <http://geodesy.gd.itb.ac.id/bsetyadji/wp-content/uploads/2007/09/gd4113-2.pdf>. Diakses tanggal 05 Januari 2010.

Suprajitno Munadi. (2005). *Pengantar Geostatistik*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Walpole, R. E. (1982). *Pengantar Statistika, Edisi ketiga*. (Terjemahan Bambang Sumantri). Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Data titik koordinat (meter) dan *porositas* air tanah (persen)

no	<i>X</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>p</i>
1	1.86	4.629	25	10.9
2	2.362	4.874	35	12.4
3	2.097	4.611	24	12.7
4	1.55	4.437	28	13.8
5	1.863	4.37	18	14.1
6	2.112	4.371	32	11.6
7	2.175	4.317	35	14.7
8	2.233	4.253	42	13.3
9	1.421	4.075	25	10.6
10	1.634	4.136	27	10.8
11	1.88	4.126	20	13.4
12	2.096	4.129	35	13.3
13	1.386	3.884	25	10.3
14	1.613	3.885	26	10.5
15	1.841	3.883	25	14.7
16	2.113	3.881	33	12.4
17	1.388	3.63	25	10.4
18	1.61	3.628	29	13.4
19	1.861	3.627	32	13.7
20	2.088	3.627	35	13.9
21	2.358	3.627	44	14.5
22	0.862	3.63	25	15.8
23	1.365	3.381	25	11
24	1.614	3.382	27	12.3
25	1.863	3.38	28	13.2
26	2.088	3.38	30	11.9
27	1.342	3.27	26	10.6
28	1.177	3.131	23	10
29	1.363	3.131	26	12.1
30	1.614	3.13	28	13.6
31	1.862	3.132	31	11.5
32	2.117	3.129	25	12.5

33	0.614	2.882	23	12.8
34	1.118	2.883	23	12.1
35	1.363	2.88	27	12.6
36	1.614	2.881	33	14.3
37	1.861	2.882	35	14.7
38	1.924	2.943	33	14.4
39	2.113	2.878	34	14.7
40	2.363	2.621	45	15.2
41	0.868	2.63	20	11.8
42	1.151	2.628	27	10.3
43	1.362	2.628	28	12.1
44	1.615	2.631	34	12.4
45	1.862	2.629	37	11.5
46	2.088	2.626	40	14.5
47	1.14	2.381	23	10.4
48	1.373	2.38	27	11.4
49	1.615	2.378	29	11.7
50	1.862	2.379	43	12.3
51	2.127	2.388	41	14.7
52	2.363	2.377	38	13.9
53	2.612	2.377	35	12.8
54	1.142	2.127	34	10.7
55	1.364	2.129	30	11.1
56	1.616	2.127	30	10.5
57	1.864	2.127	39	9.9
58	2.092	2.124	35	10.6
59	2.363	2.125	34	13.9
60	2.612	2.124	43	15.2
61	0.896	1.878	25	8.7
62	1.121	1.878	32	10.9
63	1.369	1.88	41	11.7
64	1.676	1.937	30	11.2
65	1.866	1.88	35	11.7
66	2.116	1.881	35	10.4
67	2.339	1.875	47	15.2
68	0.89	1.627	28	11.4

69	1.123	1.626	38	11.5
70	1.369	1.627	39	11.6
71	1.614	1.628	35	11.6
72	1.867	1.627	33	11.1
73	2.117	1.626	32	10.3
74	0.887	1.396	27	10.5
75	1.157	1.371	34	11.3
76	1.372	1.373	37	11.5
77	1.616	1.374	34	10.9
78	1.868	1.386	32	11.3
79	2.057	1.432	31	10.6
80	1.137	1.133	34	10.8
81	1.373	1.122	37	13.1
82	1.616	1.123	29	10.5
83	1.867	1.121	37	11.9
84	1.121	0.872	30	8
85	1.4	0.874	32	11.1
86	1.592	0.899	33	10.5
87	1.849	0.872	36	12.8
88	1.12	0.616	26	9.5
89	1.397	0.619	28	9.7
90	1.623	0.639	33	10.2
91	1.852	0.643	41	10
92	1.374	0.371	32	9.7
93	1.621	0.4	36	9.8
94	1.375	0.143	36	11.2

Keterangan :

- x = Titik absis lokasi air tanah
- y = Titik ordinat lokasi air tanah
- z = Titik elevasi lokasi air tanah
- p = Nilai kandungan air tanah

Lampiran 2

Perhitungan *Semivariogram* Eksperimental

Data yang diperoleh sebelumnya disimpan dalam bentuk *.txt* ke dalam *notepad*. Pemanggilan data dilakukan dalam program R dengan bantuan packages *gstat* dan *sp* yang sesuai dengan kriteria data geostatistik. Berikut adalah syntax program R untuk menghitung *semivariogram* :

```
a=read.table("coordinatdanporosity.txt",header=TRUE)
b=as.matrix(a)
coordinates(a)=~x+y+z
```

Syntax program R untuk menghitung *semivariogram* eksperimental :

```
format =function(b)
{
n=length(b[,1])
A=matrix(0,n,n)
distance=matrix(0,n,n)

for(i in 1:n)
{
for(j in 1:i)
{distance[i,j]=distance[j,i]=(sqrt((b[i,1]-
b[j,1])^2+(b[i,2]-b[j,2])^2+(b[i,3]-b[j,3])^2))}
```

```

    }

    maxdist=max(distance)

    class=1+3.3*log10(n)

    width=ceiling(maxdist/class)

    batasmaxclass=width*(ceiling(class))

    variogram=variogram(p~x+y+z,coordinates=~x+y+z,cutoff=bat
    asmaxclass,width=width,a)

    variansi=var(a$p)


    cat("Diperoleh nilai sebagai berikut ini :\n")

    cat("maksimum jarak\t = ",maxdist,"\n")

    cat("class \t\t = ",class,"\n")

    cat("width \t\t = ",width,"\n")

    cat("variansi(sill) = ",variansi,"\n")

    cat("\n")

    cat("nilai semivariogramnya : \n")

    cat("\n")

    print(variogram)

}

```

Lampiran 3

Output *semivariogram* eksperimental

```
> format(b)
```

```
Diperoleh nilai sebagai berikut ini :
```

```
maksimum jarak = 29.11102
class           = 7.550784
width           = 4
variansi (sill) = 2.781688
```

```
nilai semivariogramnya :
```

	np	dist	gamma	dir.hor	dir.ver	id
1	1320	2.296199	1.54591888	0	0	var1
2	1330	5.682387	1.47210135	0	0	var1
3	949	9.484032	1.72045075	0	0	var1
4	468	13.386888	1.85795675	0	0	var1
5	219	17.294040	2.07796541	0	0	var1
6	69	21.138926	2.54051039	0	0	var1
7	15	25.054769	1.38658449	0	0	var1
8	1	29.111022	0.03289168	0	0	var1

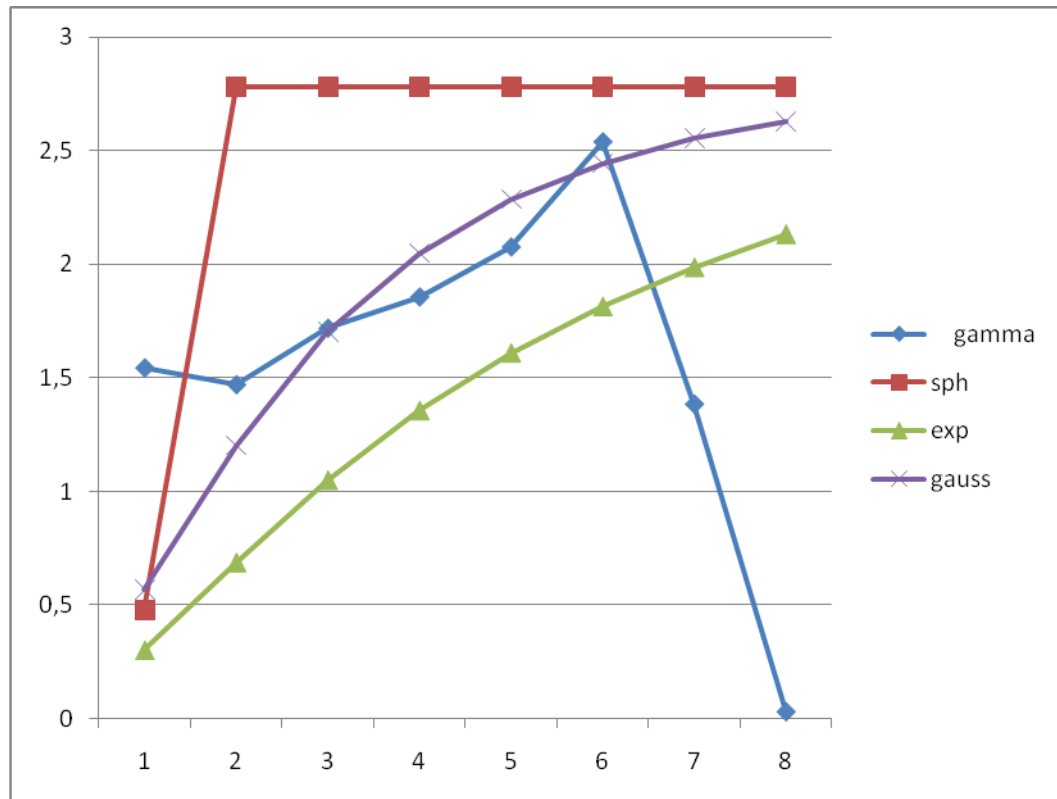
Lampiran 4

**Perbandingan *semivariogram* eksperimental dengan *semivariogram* teoritis
menggunakan model *spherical*, *eksponensial* dan *Gaussian*.**

Nilai *sill* yang digunakan adalah nilai variansi batubara yaitu 2,782 sedangkan *range* sebesar 20,02 (meter). Hasil diperoleh dengan bantuan dari *Microsoft excel* sebagai berikut :

Kelas	np	dist	gamma	sph	exp	gauss
0 - < 3,64	1320	2,296199	1,54591888	0,476471093	0,301429762	0,57019594
3,64 - < 7,28	1330	5,682387	1,47210135	2,781688	0,687381603	1,204904664
7,28 - < 10,92	949	9,484032	1,72045075	2,781688	1,049595759	1,703154559
10,92 - < 14,52	468	13,386888	1,85795675	2,781688	1,356388149	2,051383356
14,52 - < 18,2	219	17,29404	2,07796541	2,781688	1,609092373	2,287390831
18,2 - < 21,84	69	21,138926	2,54051039	2,781688	1,813987337	2,445041844
21,84 - < 25,48	15	25,054769	1,38658449	2,781688	1,985905224	2,554031187
25,48 - < 29,12	1	29,111022	0,03289168	2,781688	2,131854476	2,629879598
			MSE	2,493535887	1,366954335	1,930747747

Lampiran 5

Plot keempat model *semivariogram*

Lampiran 6

**Syntax program R beserta hasil estimasi *porositas* menggunakan metode
Universal kriging**

Syntax program R untuk menghitung estimasi *porositas* dengan model *semivariogram exponential*:

```
> porosity=read.table("coordinatdanporosity.txt",header=TRUE)
> coordinates(porosity)~x+y+z
> estimasi_porosity=read.table("coordinat1.txt",header=TRUE)
> coordinates(estimasi_porosity)~x+y+z
> variogram=vgm(2.781,"Exp",20.01,0.301)
> UK<-krige(p~x+y+z,porosity,estimasi_porosity,model=variogram)
[using universal kriging]
> UK
```

	coordinates	var1.pred	var1.var
1	(0.614, 0.142, 19)	9.743425	1.2032869
2	(0.68, 0.142, 19)	9.779327	1.2011115
3	(1.01, 0.142, 19)	9.957713	1.2032922
4	(1.076, 0.142, 19)	9.993171	1.2063244
5	(1.142, 0.142, 19)	10.028561	1.2102149
6	(1.208, 0.142, 19)	10.063882	1.2149601
7	(1.274, 0.142, 19)	10.099136	1.2205557
8	(1.34, 0.142, 19)	10.134326	1.2269976
9	(1.406, 0.142, 19)	10.169454	1.2342811
10	(1.472, 0.142, 19)	10.204520	1.2424014
11	(1.868, 0.142, 19)	10.413760	1.3084110
12	(1.934, 0.142, 19)	10.448462	1.3222448
13	(2, 0.142, 19)	10.483120	1.3368739
14	(2.066, 0.142, 19)	10.517739	1.3522931
15	(2.132, 0.142, 19)	10.552319	1.3684973
16	(2.198, 0.142, 19)	10.586864	1.3854817
17	(2.264, 0.142, 19)	10.621376	1.4032416
18	(2.33, 0.142, 19)	10.655857	1.4217723
19	(2.396, 0.142, 19)	10.690310	1.4410694
20	(2.462, 0.142, 19)	10.724738	1.4611286
21	(2.528, 0.142, 19)	10.759142	1.4819460
22	(0.614, 0.303, 19)	9.867491	1.1582941
--

Lampiran 7

Syntax plot hasil estimasi (*porositas*) kandungan air tanah

Untuk menghasilkan plot hasil estimasi batubara dalam bentuk 3D , dilakukan dengan MATLAB. Berikut adalah syntax 3D dalam MATLAB :

```
Scatter3(x, y, z, [], p)
```

Lampiran 8

**Data hasil estimasi *porositas* (kandungan air tanah) menggunakan metode
Universal kriging.**

coordinates	var1.pred	var.error
(0.614, 0.142, 19)	9.743441	1.2032031
(0.68, 0.142, 19)	9.779343	1.2010278
(1.01, 0.142, 19)	9.957727	1.2032084
(1.076, 0.142, 19)	9.993185	1.2062404
(1.142, 0.142, 19)	10.028574	1.2101307
(1.208, 0.142, 19)	10.063895	1.2148755
(1.274, 0.142, 19)	10.099149	1.2204708
(1.34, 0.142, 19)	10.134339	1.2269122
(1.406, 0.142, 19)	10.169466	1.2341952
(1.472, 0.142, 19)	10.204532	1.2423150
(1.868, 0.142, 19)	10.413771	1.3083202
(1.934, 0.142, 19)	10.448472	1.3221531
(2, 0.142, 19)	10.483130	1.3367813
(2.066, 0.142, 19)	10.517748	1.3521994
(2.132, 0.142, 19)	10.552328	1.3684026
(2.198, 0.142, 19)	10.586873	1.3853859
(2.264, 0.142, 19)	10.621385	1.4031446
(2.33, 0.142, 19)	10.655866	1.4216741
(2.396, 0.142, 19)	10.690319	1.4409699
(2.462, 0.142, 19)	10.724746	1.4610279
(2.528, 0.142, 19)	10.759150	1.4818440
(0.614, 0.303, 19)	9.867507	1.1582142
(0.68, 0.303, 19)	9.903416	1.1556926
(1.01, 0.303, 19)	10.081721	1.1563415
(1.076, 0.303, 19)	10.117140	1.1591061
(1.142, 0.303, 19)	10.152482	1.1627412
(1.208, 0.303, 19)	10.187748	1.1672427
(1.274, 0.303, 19)	10.222940	1.1726058
(1.34, 0.303, 19)	10.258059	1.1788258
(1.406, 0.303, 19)	10.293109	1.1858973
(1.472, 0.303, 19)	10.328090	1.1938150
(1.538, 0.303, 19)	10.363006	1.2025731
(1.604, 0.303, 19)	10.397858	1.2121660
(1.67, 0.303, 19)	10.432648	1.2225877
(2.066, 0.303, 19)	10.640246	1.3021895
(2.132, 0.303, 19)	10.674679	1.3182473
(2.198, 0.303, 19)	10.709072	1.3350877
(2.264, 0.303, 19)	10.743428	1.3527055
(2.33, 0.303, 19)	10.777748	1.3710956
(2.396, 0.303, 19)	10.812036	1.3902532
(2.462, 0.303, 19)	10.846294	1.4101738
(2.528, 0.303, 19)	10.880525	1.4308529
(0.614, 0.464, 19)	9.992067	1.1143309
(1.142, 0.464, 19)	10.276938	1.1164003

(1.208, 0.464, 19)	10.312152	1.1206582
(1.274, 0.464, 19)	10.347284	1.1257904
(1.34, 0.464, 19)	10.382335	1.1317912
(1.406, 0.464, 19)	10.417308	1.1386546
(1.472, 0.464, 19)	10.452205	1.1463745
(1.538, 0.464, 19)	10.487028	1.1549443
(1.604, 0.464, 19)	10.521780	1.1643575
(1.67, 0.464, 19)	10.556463	1.1746073
(1.934, 0.464, 19)	10.694563	1.2238375
(2, 0.464, 19)	10.728944	1.2381695
(2.066, 0.464, 19)	10.763273	1.2532983
(2.132, 0.464, 19)	10.797554	1.2692179
(2.198, 0.464, 19)	10.831788	1.2859223
(2.264, 0.464, 19)	10.865980	1.3034057
(2.33, 0.464, 19)	10.900133	1.3216629
(2.396, 0.464, 19)	10.934248	1.3406884
(2.462, 0.464, 19)	10.968330	1.3604776
(2.528, 0.464, 19)	11.002380	1.3810256
(0.614, 0.625, 19)	10.117094	1.0715763
(0.68, 0.625, 19)	10.153047	1.0683212
(0.746, 0.625, 19)	10.188899	1.0659842
(0.812, 0.625, 19)	10.224650	1.0645641
(0.878, 0.625, 19)	10.260301	1.0640590
(0.944, 0.625, 19)	10.295852	1.0644662
(1.406, 0.625, 19)	10.542048	1.0924827
(1.472, 0.625, 19)	10.576861	1.1000094
(1.538, 0.625, 19)	10.611592	1.1083964
(1.604, 0.625, 19)	10.646243	1.1176361
(1.67, 0.625, 19)	10.680817	1.1277206
(1.736, 0.625, 19)	10.715317	1.1386423
(1.802, 0.625, 19)	10.749746	1.1503935
(2, 0.625, 19)	10.852639	1.1905488
(2.066, 0.625, 19)	10.886816	1.2055435
(2.132, 0.625, 19)	10.920937	1.2213316
(2.198, 0.625, 19)	10.955008	1.2379064
(2.264, 0.625, 19)	10.989030	1.2552619
(2.33, 0.625, 19)	11.023006	1.2733920
(2.396, 0.625, 19)	11.056941	1.2922912
(2.462, 0.625, 19)	11.090838	1.3119543
(2.528, 0.625, 19)	11.124699	1.3323762
(0.944, 0.786, 19)	10.421406	1.0211122
(1.01, 0.786, 19)	10.456848	1.0221322
(1.076, 0.786, 19)	10.492182	1.0240748
(1.142, 0.786, 19)	10.527411	1.0269345
(1.208, 0.786, 19)	10.562535	1.0307048
(1.274, 0.786, 19)	10.597558	1.0353790
(1.34, 0.786, 19)	10.632481	1.0409494
(0.614, 1.591, 19)	10.874380	0.8423781
(0.68, 1.591, 19)	10.910807	0.8364253
(0.746, 1.591, 19)	10.947061	0.8315457

(0.812, 1.591, 19)	10.983141	0.8277411
(1.67, 1.591, 19)	11.436589	0.8720339
(1.736, 1.591, 19)	11.470370	0.8821000
(1.802, 1.591, 19)	11.504018	0.8930295
(1.868, 1.591, 19)	11.537536	0.9048071
(1.934, 1.591, 19)	11.570931	0.9174190
(2, 1.591, 19)	11.604209	0.9308522
(2.066, 1.591, 19)	11.637374	0.9450951
(2.132, 1.591, 19)	11.670434	0.9601373
(2.198, 1.591, 19)	11.703394	0.9759694
...
...
...
...
(1.868, 2.718, 47.8)	15.02318	0.8556269
(1.934, 2.718, 47.8)	15.07004	0.8455388
(2, 2.718, 47.8)	15.11643	0.8367076
(2.066, 2.718, 47.8)	15.16232	0.8291677
(2.132, 2.718, 47.8)	15.20769	0.8229497
(2.198, 2.718, 47.8)	15.25251	0.8180798
(2.264, 2.718, 47.8)	15.29676	0.8145781
(2.33, 2.718, 47.8)	15.34043	0.8124584
(2.396, 2.718, 47.8)	15.38352	0.8117271
(2.462, 2.718, 47.8)	15.42603	0.8123833
(2.528, 2.718, 47.8)	15.46795	0.8144188
(0.614, 2.879, 47.8)	14.17294	1.2615795
(0.68, 2.879, 47.8)	14.22307	1.2336840
(0.746, 2.879, 47.8)	14.27319	1.2065597
(0.812, 2.879, 47.8)	14.32329	1.1802182
(0.878, 2.879, 47.8)	14.37334	1.1546725
(0.944, 2.879, 47.8)	14.42334	1.1299368
(1.01, 2.879, 47.8)	14.47327	1.1060263
(1.076, 2.879, 47.8)	14.52310	1.0829580
(1.142, 2.879, 47.8)	14.57282	1.0607500
(1.208, 2.879, 47.8)	14.62241	1.0394221
(1.274, 2.879, 47.8)	14.67185	1.0189956
(1.34, 2.879, 47.8)	14.72112	0.9994936
(1.406, 2.879, 47.8)	14.77018	0.9809407
(1.472, 2.879, 47.8)	14.81903	0.9633630
(1.538, 2.879, 47.8)	14.86762	0.9467882
(1.604, 2.879, 47.8)	14.91594	0.9312454
(1.67, 2.879, 47.8)	14.96395	0.9167646
(1.736, 2.879, 47.8)	15.01164	0.9033767
(1.802, 2.879, 47.8)	15.05896	0.8911129
(1.868, 2.879, 47.8)	15.10590	0.8800043
(1.934, 2.879, 47.8)	15.15243	0.8700811
(2, 2.879, 47.8)	15.19851	0.8613720
(2.066, 2.879, 47.8)	15.24414	0.8539036
(2.132, 2.879, 47.8)	15.28929	0.8476993

(2.198, 2.879, 47.8)	15.33393	0.8427789
(2.264, 2.879, 47.8)	15.37807	0.8391577
(2.33, 2.879, 47.8)	15.42167	0.8368461
(0.746, 3.04, 47.8)	14.36131	1.2298731
(0.812, 3.04, 47.8)	14.41102	1.2036667
(0.878, 3.04, 47.8)	14.46068	1.1782709
(0.944, 3.04, 47.8)	14.51027	1.1536995
(1.01, 3.04, 47.8)	14.55978	1.1299676
(1.472, 3.201, 47.8)	14.98467	1.0165937
(1.538, 3.201, 47.8)	15.03242	1.0004526
(1.604, 3.201, 47.8)	15.07991	0.9853280
(1.67, 3.201, 47.8)	15.12713	0.9712411
(1.736, 3.201, 47.8)	15.17405	0.9582131
(1.802, 3.201, 47.8)	15.22064	0.9462649
(1.868, 3.201, 47.8)	15.26691	0.9354165
(1.934, 3.201, 47.8)	15.31281	0.9256872
(2, 3.201, 47.8)	15.35835	0.9170949
(2.066, 3.201, 47.8)	15.40349	0.9096557
(2.132, 3.201, 47.8)	15.44824	0.9033838
(2.198, 3.201, 47.8)	15.49257	0.8982908
(2.264, 3.201, 47.8)	15.53647	0.8943861
(2.33, 3.201, 47.8)	15.57994	0.8916758
(2.396, 3.201, 47.8)	15.62298	0.8901633
(2.462, 3.201, 47.8)	15.66558	0.8898488
(2.528, 3.201, 47.8)	15.70774	0.8907296
(0.614, 3.362, 47.8)	14.43591	1.3380234
(0.68, 3.362, 47.8)	14.48489	1.3104469
(0.746, 3.362, 47.8)	14.53383	1.2836796
(0.812, 3.362, 47.8)	14.58272	1.2577328
(0.878, 3.362, 47.8)	14.63156	1.2326184
(0.944, 3.362, 47.8)	14.68031	1.2083490
(1.01, 3.362, 47.8)	14.72897	1.1849379
(1.076, 3.362, 47.8)	14.77753	1.1623992
(1.142, 3.362, 47.8)	14.82597	1.1407475
(1.208, 3.362, 47.8)	14.87427	1.1199984
(1.274, 3.362, 47.8)	14.92241	1.1001677
(1.34, 3.362, 47.8)	14.97039	1.0812721
(1.406, 3.362, 47.8)	15.01817	1.0633287
(1.472, 3.362, 47.8)	15.06574	1.0463550
(1.538, 3.362, 47.8)	15.11309	1.0303686
(1.604, 3.362, 47.8)	15.16020	1.0153874
(1.67, 3.362, 47.8)	15.20704	1.0014293
(1.736, 3.362, 47.8)	15.25361	0.9885117
(1.802, 3.362, 47.8)	15.29987	0.9766519
(1.868, 3.362, 47.8)	15.34583	0.9658662
(1.934, 3.362, 47.8)	15.39146	0.9561700
(2, 3.362, 47.8)	15.43674	0.9475777
(2.066, 3.362, 47.8)	15.48167	0.9401022
(2.132, 3.362, 47.8)	15.52623	0.9337546
(2.198, 3.362, 47.8)	15.57041	0.9285442

(2.264, 3.362, 47.8)	15.61420	0.9244783
(2.33, 3.362, 47.8)	15.65761	0.9215620
(2.396, 3.362, 47.8)	15.70061	0.9197980
(2.462, 3.362, 47.8)	15.74322	0.9191867
(2.528, 3.362, 47.8)	15.78543	0.9197262
(0.614, 3.523, 47.8)	14.52151	1.3680088
(0.68, 3.523, 47.8)	14.57009	1.3405269
(0.746, 3.523, 47.8)	14.61862	1.3138625
(0.812, 3.523, 47.8)	14.66710	1.2880265
(0.878, 3.523, 47.8)	14.71551	1.2630299
(1.076, 3.523, 47.8)	14.86023	1.1931979
(1.142, 3.523, 47.8)	14.90824	1.1716826
(1.208, 3.523, 47.8)	14.95612	1.1510711
(2.528, 3.523, 47.8)	15.86242	0.9501929
(0.614, 3.684, 47.8)	14.60637	1.4000407
(0.68, 3.684, 47.8)	14.65454	1.3726395
(0.746, 3.684, 47.8)	14.70267	1.3460622
(0.812, 3.684, 47.8)	14.75074	1.3203190
(0.878, 3.684, 47.8)	14.79874	1.2954203
(0.944, 3.684, 47.8)	14.84666	1.2713769
(1.01, 3.684, 47.8)	14.89449	1.2482003
(1.076, 3.684, 47.8)	14.94221	1.2259022
(1.142, 3.684, 47.8)	14.98982	1.2044946
(1.208, 3.684, 47.8)	15.03729	1.1839899
(1.274, 3.684, 47.8)	15.08462	1.1644008
(1.34, 3.684, 47.8)	15.13179	1.1457402
(1.406, 3.684, 47.8)	15.17879	1.1280212
(1.472, 3.684, 47.8)	15.22559	1.1112568
(1.538, 3.684, 47.8)	15.27220	1.0954600
(1.604, 3.684, 47.8)	15.31859	1.0806439
(1.67, 3.684, 47.8)	15.36475	1.0668209
(1.736, 3.684, 47.8)	15.41067	1.0540035
(1.802, 3.684, 47.8)	15.45633	1.0422035
(1.868, 3.684, 47.8)	15.50173	1.0314319
(1.934, 3.684, 47.8)	15.54684	1.0216992
(2, 3.684, 47.8)	15.59167	1.0130149
(2.066, 3.684, 47.8)	15.63620	1.0053875
(2.132, 3.684, 47.8)	15.68041	0.9988243
(2.198, 3.684, 47.8)	15.72432	0.9933316
(2.264, 3.684, 47.8)	15.76790	0.9889141
(2.33, 3.684, 47.8)	15.81115	0.9855752
(2.396, 3.684, 47.8)	15.85408	0.9833170
(2.462, 3.684, 47.8)	15.89667	0.9821400
(2.528, 3.684, 47.8)	15.93893	0.9820433
(0.614, 3.845, 47.8)	14.69064	1.4340221
(0.68, 3.845, 47.8)	14.73841	1.4066856
(0.746, 3.845, 47.8)	14.78613	1.3801778
(0.812, 3.845, 47.8)	14.83380	1.3545078
(0.878, 3.845, 47.8)	14.88139	1.3296856
(0.944, 3.845, 47.8)	14.92891	1.3057210

(1.01, 3.845, 47.8)	14.97634	1.2826245
(1.076, 3.845, 47.8)	15.02366	1.2604067
(1.142, 3.845, 47.8)	15.07087	1.2390784
(1.208, 3.845, 47.8)	15.11796	1.2186508
(1.274, 3.845, 47.8)	15.16490	1.1991350
(1.34, 3.845, 47.8)	15.21169	1.1805425
(1.406, 3.845, 47.8)	15.25832	1.1628845
(1.472, 3.845, 47.8)	15.30477	1.1461726
(1.538, 3.845, 47.8)	15.35103	1.1304178
(1.604, 3.845, 47.8)	15.39709	1.1156314
(1.67, 3.845, 47.8)	15.44294	1.1018240
(1.736, 3.845, 47.8)	15.48856	1.0890060
(1.802, 3.845, 47.8)	15.53395	1.0771875
(1.868, 3.845, 47.8)	15.57908	1.0663777
(1.934, 3.845, 47.8)	15.62397	1.0565853
(2, 3.845, 47.8)	15.66858	1.0478183
(2.066, 3.845, 47.8)	15.71292	1.0400836
(2.132, 3.845, 47.8)	15.75698	1.0333875
(2.198, 3.845, 47.8)	15.80075	1.0277349
(2.264, 3.845, 47.8)	15.84423	1.0231300
(2.33, 3.845, 47.8)	15.88740	1.0195755
(2.396, 3.845, 47.8)	15.93028	1.0170734
(2.462, 3.845, 47.8)	15.97285	1.0156241
(2.528, 3.845, 47.8)	16.01511	1.0152269
(0.614, 4.006, 47.8)	14.77446	1.4698724
(0.68, 4.006, 47.8)	14.82184	1.4425835
(0.746, 4.006, 47.8)	14.86917	1.4161265
(0.812, 4.006, 47.8)	14.91644	1.3905098
(0.878, 4.006, 47.8)	14.96364	1.3657425
(0.944, 4.006, 47.8)	15.01077	1.3418338
(1.01, 4.006, 47.8)	15.05781	1.3187931
(1.076, 4.006, 47.8)	15.10474	1.2966300
(1.142, 4.006, 47.8)	15.15157	1.2753542
(1.208, 4.006, 47.8)	15.19828	1.2549758
(1.274, 4.006, 47.8)	15.24485	1.2355046
(1.34, 4.006, 47.8)	15.29128	1.2169506
(1.406, 4.006, 47.8)	15.33756	1.1993239
(1.472, 4.006, 47.8)	15.38367	1.1826343
(1.538, 4.006, 47.8)	15.42961	1.1668916
(1.604, 4.006, 47.8)	15.47535	1.1521054
(1.67, 4.006, 47.8)	15.52090	1.1382847
(1.736, 4.006, 47.8)	15.56624	1.1254387
(1.802, 4.006, 47.8)	15.61137	1.1135756
(1.868, 4.006, 47.8)	15.65626	1.1027034
(1.934, 4.006, 47.8)	15.70092	1.0928294
(2, 4.006, 47.8)	15.74533	1.0839603
(2.066, 4.006, 47.8)	15.78950	1.0761019
(1.934, 4.489, 47.8)	15.93203	1.2095666
(2, 4.489, 47.8)	15.97589	1.2003030
(2.066, 4.489, 47.8)	16.01956	1.1919990

(2.132, 4.489, 47.8)	16.06303	1.1846578
(2.198, 4.489, 47.8)	16.10630	1.1782822
(2.264, 4.489, 47.8)	16.14936	1.1728743
(2.33, 4.489, 47.8)	16.19221	1.1684358
(2.396, 4.489, 47.8)	16.23485	1.1649678
(2.462, 4.489, 47.8)	16.27727	1.1624708
(2.528, 4.489, 47.8)	16.31948	1.1609447
(0.614, 4.65, 47.8)	15.10774	1.6307967
(0.68, 4.65, 47.8)	15.15365	1.6035297
(0.746, 4.65, 47.8)	15.19953	1.5770972
(0.812, 4.65, 47.8)	15.24535	1.5515052
(0.878, 4.65, 47.8)	15.29111	1.5267603
(0.944, 4.65, 47.8)	15.33681	1.5028687
(1.01, 4.65, 47.8)	15.38243	1.4798368
(1.076, 4.65, 47.8)	15.42797	1.4576712
(1.142, 4.65, 47.8)	15.47343	1.4363783
(1.208, 4.65, 47.8)	15.51879	1.4159644
(1.274, 4.65, 47.8)	15.56405	1.3964359
(1.34, 4.65, 47.8)	15.60920	1.3777991
(1.406, 4.65, 47.8)	15.65423	1.3600600
(1.472, 4.65, 47.8)	15.69914	1.3432247
(1.538, 4.65, 47.8)	15.74392	1.3272989
(1.604, 4.65, 47.8)	15.78857	1.3122884
(1.67, 4.65, 47.8)	15.83307	1.2981983
(1.736, 4.65, 47.8)	15.87742	1.2850339
(1.802, 4.65, 47.8)	15.92161	1.2727998
(1.868, 4.65, 47.8)	15.96564	1.2615006
(1.934, 4.65, 47.8)	16.00950	1.2511403
(2, 4.65, 47.8)	16.05319	1.2417226
(2.066, 4.65, 47.8)	16.09671	1.2332508
(2.132, 4.65, 47.8)	16.14004	1.2257278
(2.198, 4.65, 47.8)	16.18319	1.2191560
(2.264, 4.65, 47.8)	16.22614	1.2135372
(2.33, 4.65, 47.8)	16.26891	1.2088730
(2.396, 4.65, 47.8)	16.31148	1.2051644
(2.066, 4.811, 47.8)	16.17422	1.2758237
(2.132, 4.811, 47.8)	16.21742	1.2681127
(2.198, 4.811, 47.8)	16.26045	1.2613400
(2.264, 4.811, 47.8)	16.30330	1.2555072
(2.33, 4.811, 47.8)	16.34598	1.2506156
(2.396, 4.811, 47.8)	16.38848	1.2466660
(2.462, 4.811, 47.8)	16.43080	1.2436590
(2.528, 4.811, 47.8)	16.47294	1.2415946